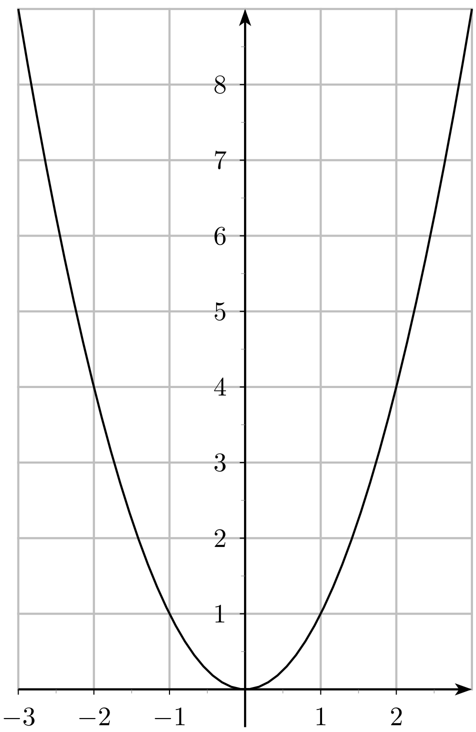
Chapitre 9 : Fonctions de référence -02-04-12-
Seconde 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Définition et étude de la fonction carré

La *fonction carré* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre x associe son carré $x^2 = x \times x$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on appelle *parabole* la courbe représentative de la fonction carré et plus généralement de toute fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = (-x)^2$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Plus généralement, la parabole représentant $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.



Propriété. La fonction carré prend des valeurs positives ($x^2 \geq 0$ pour tout x). De plus, $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Preuve. On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

Propriété. La fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.

Preuve. Soient $u < v$ deux réels. On a : $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Comme $u < v$, on a $0 < v - u$.
• si $0 \leq u < v$, alors $u + v > 0$ donc, comme produit de deux facteurs strictement positifs, $0 < (v-u)(v+u) = v^2 - u^2$ d'où $u^2 < v^2$. Ainsi, la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
• si $u < v \leq 0$, alors $u + v < 0$ donc, comme produit de deux facteurs de signes contraires, $0 > (v+u)(v-u) = v^2 - u^2$, donc $u^2 > v^2$. Ainsi, la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$. $\square$

2. Carrés et calcul algébrique

Pour tous réels a et b, on a :

$\star$ $(ab)^2 = a^2 \times b^2$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ si $b \neq 0$.

$\star$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ⚠ $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ si $a \neq 0$ et $b \neq 0$!

$\star$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\star$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Preuve.

- $(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2 \times b^2$.
- l'égalité suivante vient des propriétés des fractions.
- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \times (-b) - ba + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ $\square$

Méthode. Montrer une égalité de deux expressions algébriques :

1. On commence la rédaction en donnant le domaine de validité du calcul (par exemple, "pour tout $x \in \mathbb{R}$", ou "pour tout $x > 0$").
2. On choisit celui des deux membres dont on va partir. De préférence, on choisit une expression que l'on peut développer, ou que l'on peut réduire au même dénominateur.
3. On part de l'un des membres de l'égalité, et on aboutit, après une succession d'égalités, à l'autre membre.
4. On conclue.

Exemple. Démontrer que pour tout x réel, $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$.....

....

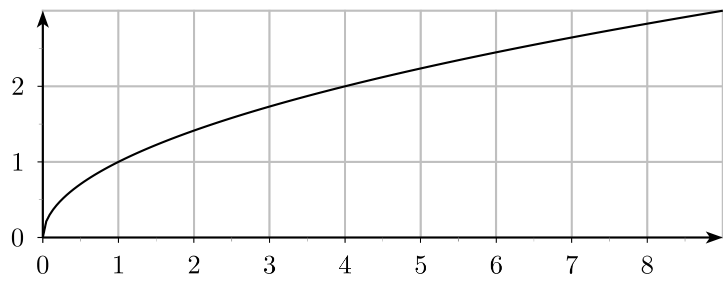
....

....

....

3. Définition et étude de la fonction racine carrée

Définition. La *racine carrée* $\sqrt{p}$ d'un nombre réel p positif est l'unique solution *positive* de l'équation $x^2 = p$. La *fonction racine carrée* est la fonction qui à tout nombre réel positif associe sa racine carrée : $[0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.



Propriété. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Preuve. Pour tous $0 \leq u < v$, $0 < v - u = \sqrt{v}^2 - \sqrt{u}^2$, en factorisant on a : $0 < (\sqrt{v} - \sqrt{u})(\sqrt{v} + \sqrt{u})$. En divisant par $\sqrt{v} + \sqrt{u} > 0$, on obtient $0 < \sqrt{v} - \sqrt{u}$ donc $\sqrt{u} < \sqrt{v}$: La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. $\square$

Propriété. $\star$ $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{0} = 0$.
- $\star$ pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$.
- $\star$ pour tout $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas et $\sqrt{x^2} = -x$ (ex. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$).
- $\star$ pour tous $u, v \geq 0$ $\sqrt{u \times v} = \sqrt{u} \times \sqrt{v}$.
- $\star$ pour tous $u \geq 0$ et $v > 0$, $\sqrt{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$
- $\star$ ⚠ pour tous $u, v > 0$ $\sqrt{u+v} \neq \sqrt{u} + \sqrt{v}$

Preuve. $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$ justifie le premier point. Les deux suivants sont des conséquences de la définition. Les trois derniers se montrent en élevant chacun des membres au carrée.

Théorème. L'équation $x^2 = m$ admet :
$\star$ deux solutions, $x = \sqrt{m}$ ou $x = -\sqrt{m}$, si $m > 0$.
$\star$ un solution, $x = 0$ si $m = 0$.
$\star$ aucune solution si $m < 0$.

Exemple. Résoudre $x^2 - 1 = 0$.

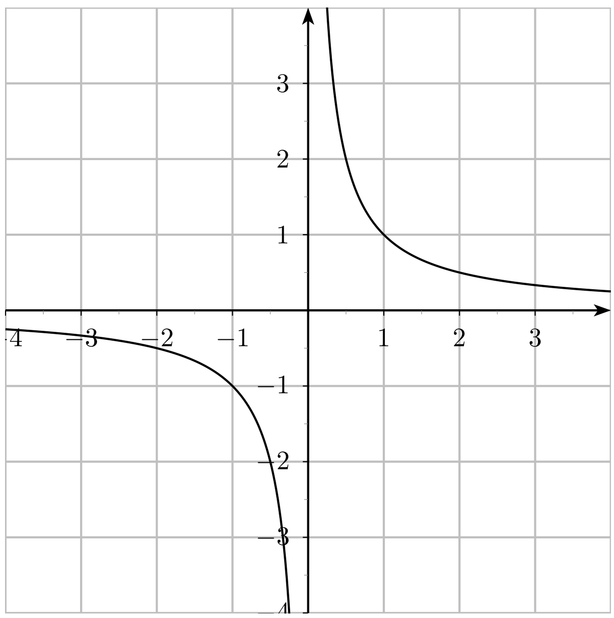
4. Définition et étude de la fonction inverse

La *fonction inverse* est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ qui à tout nombre x associe son inverse :

$$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Dans le plan munis d'un repère orthonormé, on appelle *hyperbole* la courbe représentative de la fonction inverse et plus généralement de toute fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

L'hyperbole qui représente la fonction inverse admet l'origine du repère $(0, 0)$ comme centre de symétrie. Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont dites *asymptotes* à la courbe représentative de la fonction inverse.
L'hyperbole qui représente $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ admet $(-d/c, a/c)$ comme centre de symétrie. Les droites d'équations $x = -d/c$ et $y = a/c$ sont dites *asymptotes* à la courbe représentative de la fonction inverse.



Propriété. La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Preuve. Soient $0 < u < v$ deux réels. Alors $uv > 0$ donc $\dfrac{1}{uv} > 0$.
On multiplie chaque membre de l'inégalité par $\dfrac{1}{uv}$:

$$\frac{1}{uv} \times 0 < \frac{1}{uv} \times u < \frac{1}{uv} \times v \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{v} < \frac{1}{u}$$

Donc la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Un raisonnement analogue s'applique au cas où $u < v < 0$ car $uv > 0$ comme produit de deux nombres strictement négatifs. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Remarque. Attention, la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} - \{0\}$!
Contre exemple :

5. Inverse et calcul algébrique

Définition. Soient n et d deux réels, avec d non nul. L'écriture $\dfrac{n}{d}$ désigne l'unique solution de l'équation $dx = n$ d'inconnue x. Le nombre n est le *numérateur* et le nombre d le *dénominateur* de la fraction $\dfrac{n}{d}$.

Propriété. Soients a, b, c, d quatre réels. Alors

- ⋆ $a = \dfrac{a}{1}$.
- ⋆ $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$ où $b, c \neq 0$.
- ⋆ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ (et $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$) avec $b \neq 0$.
- ⋆ $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ où $b, d \neq 0$.
- ⋆ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{cb}$ où $b, c, d \neq 0$.

Preuve. On prouve chacun des points à l'aide de la définition :
• a est l'unique solution de l'équation $1 \times x = a \Leftrightarrow x = a$. Donc $a = \dfrac{a}{1}$.
• $bcx = ac \Leftrightarrow bcx - ac = 0 \Leftrightarrow c(bx - a) = 0 \Leftrightarrow bx - a = 0 \Leftrightarrow bx = a$ donc les équations $bcx = ac$ et $bx = a$ ont la même solution : $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.
• En ajoutant terme à terme les deux équations $bx = a$ et $bx' = c$, on obtient $bx + bx' = a + c \Leftrightarrow b(x + x') = a + c$ donc la somme des solutions de $bx = a$ et $bx = c$ est solution de $bx = a + c$, d'où $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$. Le même raisonnement peut se faire pour une différence.
• En multipliant terme à terme les deux équations $bx = a$ et $dx' = c$, on obtient $bxdx' = ac \Leftrightarrow bdxx' = ac$ donc le produit des solutions de $bx = a$ et $dx = c$ est solution de $bdx = ac$: $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ où $b, d \neq 0$.
• $\dfrac{c}{d}x = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow bd \times \dfrac{c}{d}x = bd \times \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow bcx = ad$ donc les équations $\dfrac{c}{d}x = \dfrac{a}{b}$ et $bcx = ad$ ont la même solution : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{cb}$

Remarque. ⚠ Dans une fraction, on ne peut simplifier que les facteurs communs : la fraction $\dfrac{4+2}{4+3}$ n'est pas égale à $\dfrac{2}{3}$!

Remarque. ⚠ Pour ajouter, soustraire ou même comparer deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur !

Remarque. Pour mettre sous forme de fraction un résultat obtenu à la calculatrice sous forme décimale, utiliser *[Math]* puis *frac* et *[Entrée]*.

6. Équations et inéquations

Méthode. Résoudre une équation ou une inéquation :

1. On se place dans la situation où l'un des membres est nul. (en passant l'un des membres de l'autre côté)
2. On factorise le membre non nul :
   (a) En réduisant toutes les fractions au même dénominateur.
   (b) En détectant les facteurs communs et en les factorisant.
   (c) En utilisant au besoin les identités remarquables.
   (d) En utilisant une forme factorisée donnée par l'énoncé.
3. On résout l'équation ou l'inéquation avec les principes suivants :
   (a) Équation : on utilise la propriété "un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul" : l'ensemble des solutions est l'ensemble des zéros de chacun des facteurs.
   (b) Inéquation : on dresse un tableau de signes (avec une ligne par facteur du numérateur et du dénominateur et une ligne de conclusion obtenue avec la règle des signes).
4. On conclue en donnant l'ensemble des solutions (à l'aide d'intervalles pour une inéquation).

Exemple. Résoudre $(x+3)+(x+2)^2=1$.

Exemple. Résoudre $\dfrac{2}{x+1} > 2$.