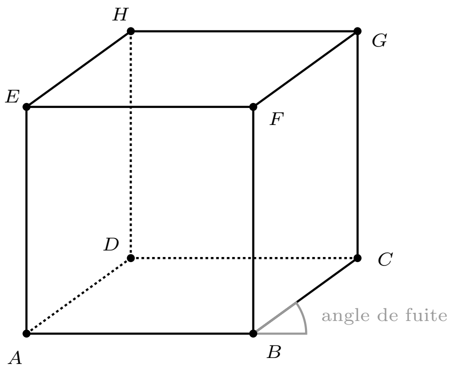
Chapitre 8 : Géométrie dans l'espace -13-03-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Perspective cavalière

La *perspective cavalière* permet de représenter en deux dimensions (sur une feuille de papier, un tableau) des objets en trois dimensions (un cube, un tétraèdre, etc...).

La perspective cavalière obéit à plusieurs règles :
- ⋆ Les lignes visibles sont représentées en traits pleins, les lignes cachées en pointillés.
- ⋆ Les éléments (angles, longueurs) des *plans frontaux* (en face ou perpendiculaires au regard de l'observateur) sont représentés en vraies grandeurs.
- ⋆ Les droites parallèles au regard de l'observateur (appelés *fuyantes*) forment un angle avec l'horizontale fixé (appelé angle de fuite, souvent entre 30^o et 60^o).
- ⋆ ⚠ en dehors des plans frontaux les angles et les longueurs subissent des déformations et ne sont pas les angles ou longueurs réels.

Exemple. Un cube $ABCDEFGH$:



Faces visibles :

Faces cachées :

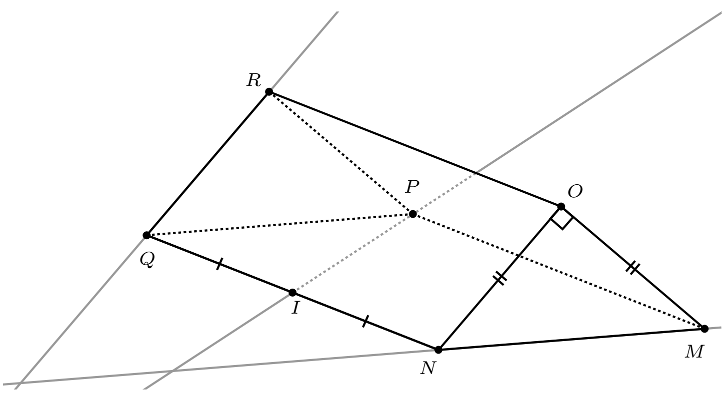
Faces contenues dans des plans frontaux :

Droites fuyantes :

Couples de droites non parallèles et non sécantes :

Propriétés. En perspective cavalière
- ⋆ Si deux droites sont parallèles, alors elles sont représentées par deux droites parallèles.
- ⋆ Si trois points sont alignés, alors ils sont représentés par trois points alignés.
- ⋆ Si deux droites sont sécantes, alors elles sont représentées par deux droites sécantes.
- ⋆ Si un point est le milieu d'un segment, alors il est représenté par le milieu du segment.
- ⋆ ⚠ les propriétés réciproque des propriétés précédentes sont fausses en général.

Exemple. La figure représente un prisme $MNOPQR$. Le plan (MNO) est frontal et la droite (MP) est une fuyante.



(a) Représenter les angles droits.

(b) (MN) et (PI) sont-elles sécantes ?

(c) (MN) et (QR) sont-elles sécantes ?

(d) (QR) et (PI) sont-elles sécantes ?

(e) Représenter le centre du prisme

(f) Calculer le volume du prisme ($V = b \times h$).

2. Bases de la géométrie spatiale

Axiomes de la géométrie spatiale

$\mathcal{A}_1$: Par deux points distincts A et B passe une unique droite, notée (AB).
Des points appartenants à une même droite sont dits *alignés*.

$\mathcal{A}_2$: Une droite contient au moins deux points distincts.

$\mathcal{A}_3$: Par trois points A, B et C non alignés passe un unique plan, noté (ABC).
Des points ou droites contenus dans un même plan sont dits *coplanaires*.

$\mathcal{A}_4$: Un plan contient au moins trois points non alignés.

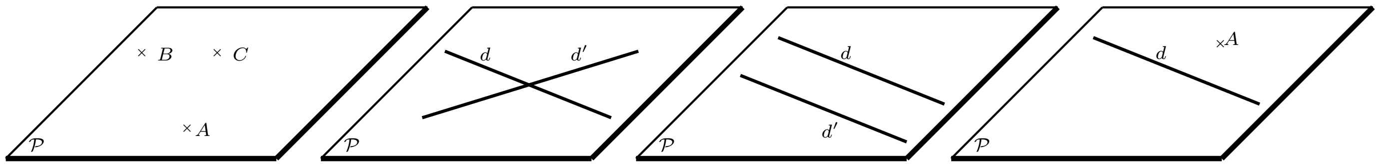
$\mathcal{A}_5$: Si A et B sont deux points d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans $\mathcal{P}$.

$\mathcal{A}_6$: Deux plans distincts ayant un point commun se coupent suivant une droite.

$\mathcal{A}_7$: (Euclide) Par un point donné passe une unique droite parallèle à une droite donnée.
(deux droites sont parallèles si elles sont coplanaires et d'intersection vide)

Caractérisation des plans

$\mathcal{T}_1$: il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant :



(a) trois points non alignés **(b)** deux droites sécantes **(c)** deux parallèles strictes **(d)** une droite et un point extérieur

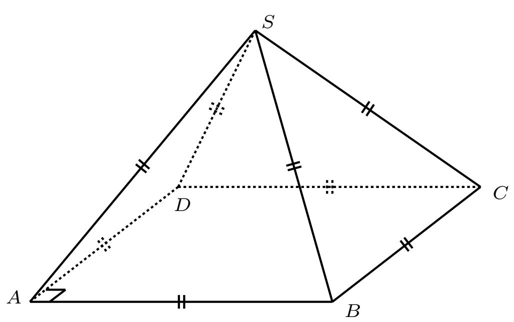
Preuve. (a) : vrai d'après $\mathcal{A}_3$.
(b) : si $\{A\} = d \cap d'$, il existe $B \in d$, $C \in d'$ distincts de A d'après $\mathcal{A}_2$. Ces points définissent un plan $\mathcal{P}$ ($\mathcal{A}_3$), qui contient d et d' ($\mathcal{A}_5$). Tout plan contenant d et d' contient A, B, C donc est égal à $\mathcal{P}$ d'après $\mathcal{A}_3$.
(c) : deux droites parallèles sont coplanaires (définition). Le plan est unique : raisonner comme précédemment.
(d) : si $B, C \in d$ distincts, le plan défini par A, B, C contient d et A, et il est unique d'après $\mathcal{A}_3$. $\square$

Exemple. Prouver par l'absurde que s'il existe un plan $\mathcal{P}$ contenant une droite d, et coupé en un point n'appartenant pas à d par une droite d', alors d et d' ne sont pas coplanaires.

Utiliser les théorèmes de géométrie plane

Les théorèmes de géométrie plane (Pythagore, Thalès, ...) sont applicables à des objets géométriques coplanaires.

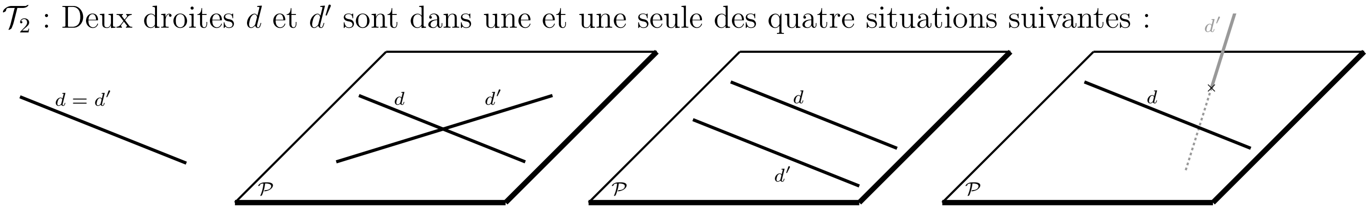
Exemple. Le volume d'une pyramide ou d'un cône est $V = \frac{1}{3}b \times h$ où b est la surface de la base et h est la hauteur (distance du sommet à son projeté orthogonal sur le plan de la base). Volume de la pyramide :



3. Positions relatives

Position relative de deux droites

$\mathcal{T}_2$: Deux droites d et d' sont dans une et une seule des quatre situations suivantes :

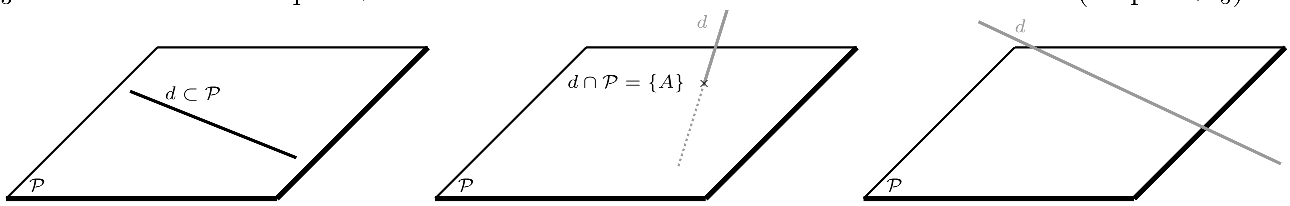


(a) : $d = d'$ parallèles, coplanaires.
(b) : d et d' *sécantes* d, d' contenues dans un unique plan.
(c) : d et d' *parallèles strictes* d, d' contenues dans un unique plan.
(d) : d et d' non coplanaires ⚠ d et d' ni sécantes, ni parallèles

Preuve. Soient deux droites d et d' :
(a) : si $d \cap d'$ contient plus d'un point, $d = d'$ par unicité de $\mathcal{A}_1$. (d et d' sont parallèles)
(b) : si $d \cap d'$ contient un seul point O, on dit que d et d' sont sécantes.
(c) : si $d \cap d' = \varnothing$ et d et d' coplanaires, on dit que d et d' sont *strictement parallèles*.
(d) : cas où $d \cap d' = \varnothing$ et d, d' non coplanaires. □

Position relative d'une droite et d'un plan

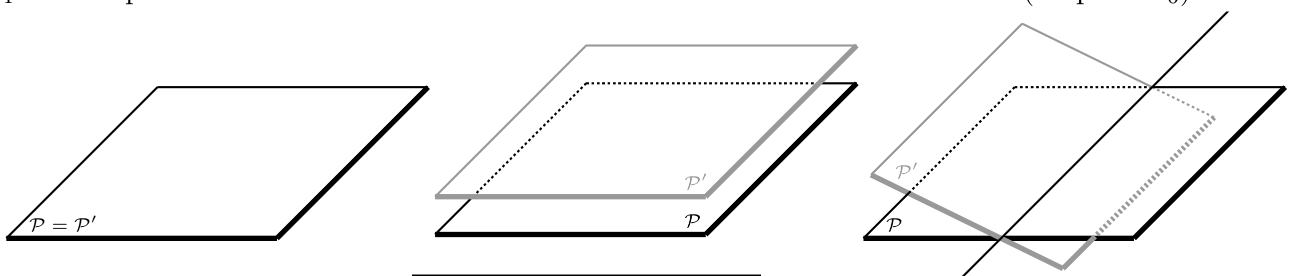
$\mathcal{T}_3$: Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont dans une et une seule des situations suivantes (d'après $\mathcal{A}_5$) :



(a) : d contenue dans $\mathcal{P}$
(b) : d coupe $\mathcal{P}$ en un point
(c) : d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

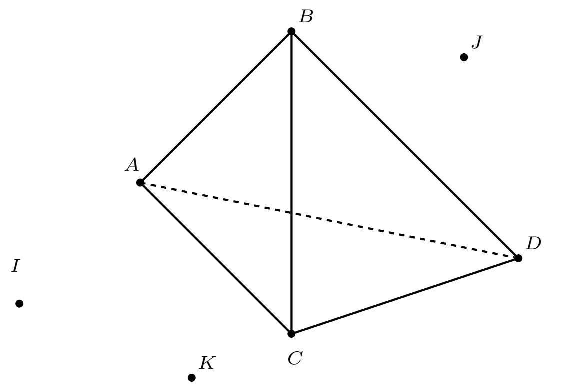
Position relative de deux plans

$\mathcal{T}_4$: Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dans une et une seule des situations suivantes (d'après $\mathcal{A}_6$) :



(a) : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus
(b) : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles
(c) : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ = une droite

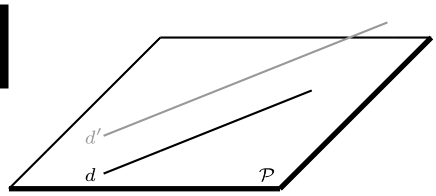
Exemple. Sachant que $I \in (AB)$, $J \in (ABD)$ et $K \in (ACD)$, représenter la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK). (chercher pour chaque face deux points appartenant au plan de la face et à (IJK)).



Exemple. Illustrer chacune des situations de cette page par un exemple tiré du cube $ABCDEFGH$.

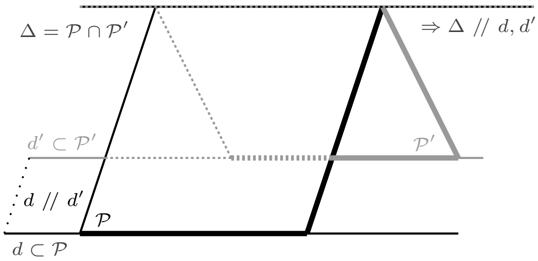
4. Parallélisme

$\mathcal{T}_5$: Une droite parallèle à une autre droite contenue dans un plan est parallèle au plan.



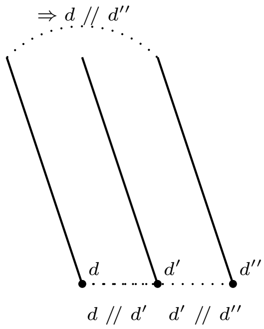
Preuve. Soient $d \parallel d'$ deux droites, avec $d \subset \mathcal{P}$. Si $d' \cap \mathcal{P} = \varnothing$, alors $d' \parallel \mathcal{P}$. Sinon, soit $A \in d' \cap \mathcal{P}$. L'unique plan défini par d' et d ($\mathcal{T}_1(c)$) est l'unique plan contenant A et d ($\mathcal{T}_1(d)$), c'est donc $\mathcal{P}$. Donc $d' \subset \mathcal{P}$: $d' \parallel \mathcal{P}$. $\square$

$\mathcal{T}_6$: « théorème du toit ». Soient deux droites parallèles chacune contenue dans un plan. Si les plans sont sécants, la droite d'intersection est parallèle à chacune des droites.



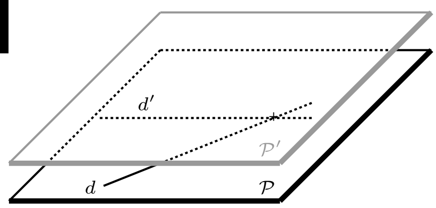
Preuve. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants suivant une droite Δ, et d, d' deux droites telles que $d \subset \mathcal{P}$, $d' \subset \mathcal{P}'$ et $d \parallel d'$.
$d \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \mathcal{P}$ sont coplanaires. Si $d \cap \Delta =$, elles sont donc parallèles, sinon d est parallèle à $\mathcal{P}'$ (d'après $\mathcal{T}_5$) et rencontre $\mathcal{P}'$, donc $d \subset \mathcal{P}'$. Ainsi, $\Delta = d$ et $d \parallel \Delta$. (idem pour $d' \parallel \Delta$). $\square$

$\mathcal{T}_7$: Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.



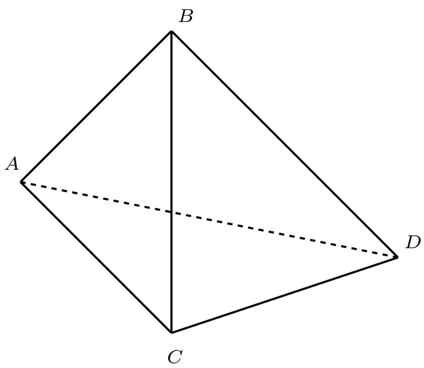
Preuve. Si deux des droites sont confondues, c'est évident. Sinon, soient d, d', d'' trois droites telles que $d \parallel d'$ et $d' \parallel d''$. Soit $\mathcal{P}$ l'unique plan défini par d et d' ($\mathcal{T}_1(c)$) et $\mathcal{Q}$ l'unique plan défini par $A \in d$ et d'' ($\mathcal{T}_1(d)$).
Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, les plans se coupent suivant une droite Δ contenant A et parallèle à d' et d'' ($\mathcal{T}_6$). Par uncitié de la parallèle à d passant par A ($\mathcal{A}_7$), $d = \Delta$ donc $d \parallel d''$.
Si $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, les droites d, d', d'' sont coplanaires, et si d et d'' étaient sécantes, elles seraient deux parallèles à Δ passant par le point d'intersection, donc confondues ($\mathcal{A}_7$) : ce qui est contradictoire avec $d \neq d''$. Donc d et d' coplanaires non sécantes : $d \parallel d''$. $\square$

$\mathcal{T}_8$: Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.



Preuve. Soient d et d' deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et un plan $\mathcal{P}'$ tel que $d \parallel \mathcal{P}'$ et $d' \parallel \mathcal{P}'$. Si $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P} = \varnothing$ alors $\mathcal{P}' \parallel \mathcal{P}$. Sinon, soit $\Delta \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.
$d \cap \Delta \neq \varnothing$ ou $d' \cap \Delta \neq \varnothing$ (sinon d et d' seraient deux parallèles à Δ passant par un même point, en contradiction avec $\mathcal{A}_7$). Si $d \cap \Delta \neq \varnothing$, alors d parallèle à $\mathcal{P}'$ rencontre $\mathcal{P}'$, donc $d \subset \mathcal{P}'$. Mais alors $A \in d \cap d' \subset d' \cap \mathcal{P}'$ et de même, $d' \subset \mathcal{P}'$. Par unicité du plan défini par d et d', $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ donc $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$. $\square$

Exemple. Soient I, J, K, L, M les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BD]$.



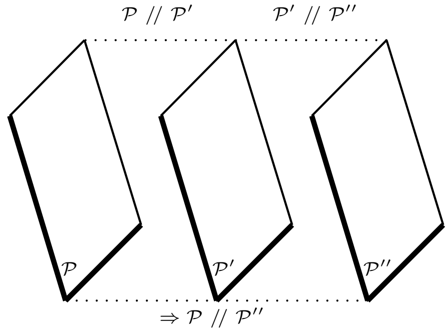
Montrer que $(IJ) \parallel (LK)$.

Montrer que $(IJK) \parallel (BD)$.

Montrer que $(IJM) \parallel (ACD)$.

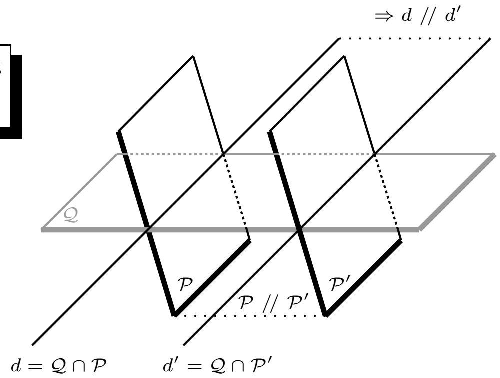
$\mathcal{T}_9$: Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux

Preuve. Soit $\mathcal{P} \mathbin{//} \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}'' \mathbin{//} \mathcal{P}'$. Si $\mathcal{P}'' \mathbin{//} \mathcal{P}'$, le théorème est vrai. Sinon il existe $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}''$. Soient d' et Δ' deux droites sécantes de $\mathcal{P}'$, et d et Δ leurs parallèles respectives passant par A. D'après $\mathcal{T}_5$, d et Δ sont contenues dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$. D'après $\mathcal{T}_1(b)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}''$ donc $\mathcal{P} \mathbin{//} \mathcal{P}''$. $\square$



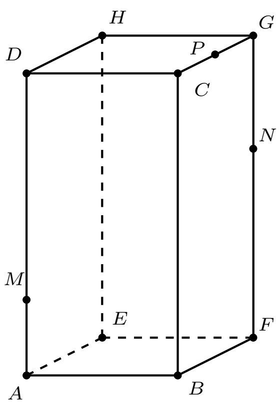
$\mathcal{T}_{10}$: Si un plan coupe deux plans parallèles, les droites d'intersections sont parallèles.

Preuve. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles distincts (si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, le théorème est évident). Soit $\mathcal{Q}$ un plan coupant $\mathcal{P}$ suivant une droite Δ. Alors $\mathcal{Q}$ coupe $\mathcal{P}'$ suivant une droite Δ'. (sinon $\mathcal{Q} \mathbin{//} \mathcal{P}'$ donc $\mathcal{Q} \mathbin{//} \mathcal{P}$ d'après $\mathcal{T}_5$).
Les droites Δ et Δ' sont coplanaires ($\Delta, \Delta' \subset \mathcal{Q}$) donc parallèles puisque contenues dans deux plans distincts. $\square$

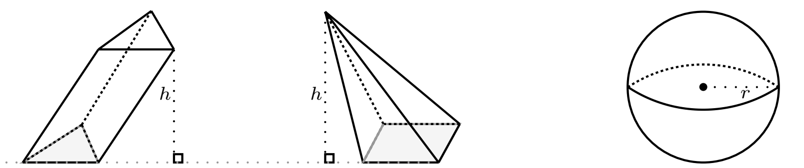


Exemple. Dans l'exemple de la page précédente, décrire la droite d d'intersection de (IJM) et (BCL), puis la droite d' d'intersection de (ACD) et (BCL) et prouver : $d \mathbin{//} d'$.

Exemple. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP), sachant que $M \in [AD]$, $N \in [GF]$ et $P \in [CG]$. (on justifiera chaque étape, on pourra procéder dans cet ordre : $BFGC, ABCD, DCGH, AEHD, EFGH, ABFE$).



5. Complément : volumes :



Prisme, cylindre : $V = B \times h$ Pyramide, cône : $V = \frac{1}{3} B \times h$ Sphère : $V = \frac{1}{3}\pi r^3$