Chapitre 7 : Probabilités -03-02-12-
Seconde 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Vocabulaire

Définition. Une *une expérience aléatoire* est un processus dont le résultat est incertain.
On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble Ω des *issues* (ou résultats) possibles de l'expérience.
Définir la *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue possible un nombre entre 0 et 1 (sa *probabilité*) qui représente les chances ou les risques que l'expérience aboutisse à ce résultat.
La somme des probabilités de chacune des issues possibles doit valoir 1.

Exemple. Le lancer d'une pièce équilibrée est une expérience aléatoire.
L'univers de cette expérience est l'ensemble : $\Omega = \{\text{pile,face}\}$.
La probabilité de l'issue « pile » est $P(\text{pile}) = 0,5$ et de même, $P(\text{face}) = 0,5$.
On a bien défini une loi de probabilité : $P(\text{pile}) + P(\text{face}) = 1$.

⚠ L'univers Ω n'est pas un nombre, mais un ensemble : dans l'exemple précédent, l'univers Ω est l'ensemble composé des 2 issues « pile » et « face » .

Définition. La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite *équirépartie* si chacune des issues possibles a la même probabilité. Si l'univers Ω compte n issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc $\frac{1}{n}$.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré.
Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie ? ....

Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience : $\Omega =$ ....

Décrire la loi de probabilité de cette expérience :

Issue						
Probabilité						

.

Évènement

Définition. Étant donnée une expérience aléatoire, un *évènement* A est une partie de l'univers Ω : il est donc composé d'un certain nombre d'issues possibles de l'expérience.
La probabilité d'un évènement A est le nombre noté $P(A)$ qui est la somme des probabilités de chacune des issues possibles de l'évènement. Ce nombre représente la chance ou le risque que l'évènement se produise.

Exemple. On reprend l'exemple du lancer de dé.
Soit A l'évènement « le résultat est 5 ou 6 ». On note $A = \{5, 6\}$ et
$P(A) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Soit B l'évènement « le résultat est pair ». $B =$ ....
$P(B) =$ ....

Remarque. Si la loi de probabilité est équirépartie : $\boxed{P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}}$

2. Évènements

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et A et B deux évènements.

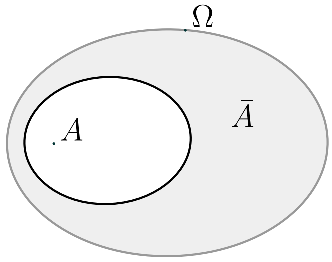
Évènement certain, évènement vide

L'évènement *certain* Ω est composé de toutes les issues possibles : sa probabilité est $\boxed{P(\Omega) = 1}$
Il est certain que cet évènement se réalise.
L'évènement *vide* $\varnothing$ ne contient aucune des issues possibles : sa probabilité est $\boxed{P(\varnothing) = 0}$
Il est certain que cet évènement ne se réalise pas.

Évènement contraire

L'évènement *contraire* de l'évènement A est l'évènement $\bar{A}$ composé des toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans A. Sa probabilité est $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple. On reprend l'expérience du dé, $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Décrire l'évènement $\bar{A}$ par une liste, par une phrase puis donner sa probabilité. Même question avec $\bar{B}$.



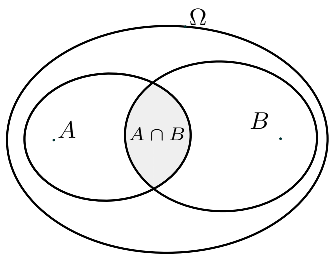
....
....
....
....

En général : $\bar{\varnothing} =$; $\bar{\bar{A}} =$

Intersection d'évènements

L'*intersection* des évènements A et B est un évènement noté $A \cap B$, il est réalisé lorsque A **et** B sont réalisés en même temps.

Exemple. On reprend l'expérience du dé, $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Décrire l'évènement $A \cap B$ par une liste, par une phrase puis donner sa probabilité. Même question avec $A \cap \bar{B}$.



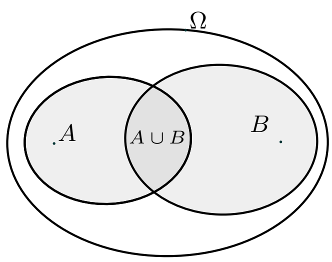
....
....
....
....

En général : $\bar{A} \cap A =$; $A \cap \Omega =$; $A \cap \varnothing =$

Union d'évènements

L'*union* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cup B$, il est réalisé lorsque A **ou** B sont réalisés. (c'est-à-dire si A est réalisé ou B est réalisé ou A et B sont réalisés en même temps).

Exemple. On reprend l'expérience du dé, $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Décrire l'évènement $A \cup B$ par une liste, par une phrase puis donner sa probabilité. Même question avec $A \cup \bar{B}$.



....
....
....
....

En général : $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) =$; $A \cup \bar{A} =$

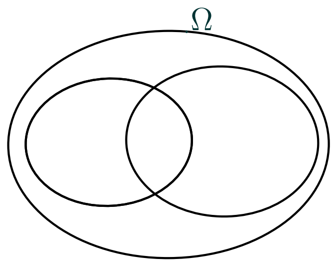
Propriété : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

3. Méthodes

Tableau à double entrée et diagramme

Un club sportif compte 200 adhérents, dont 160 pratiquent l'activité A et 60 pratiquent l'activité B. On considère l'expérience qui consiste à choisir au hasard un membre du club. Remplir le diagramme et le tableau avec les probabilités apropriées :

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			1

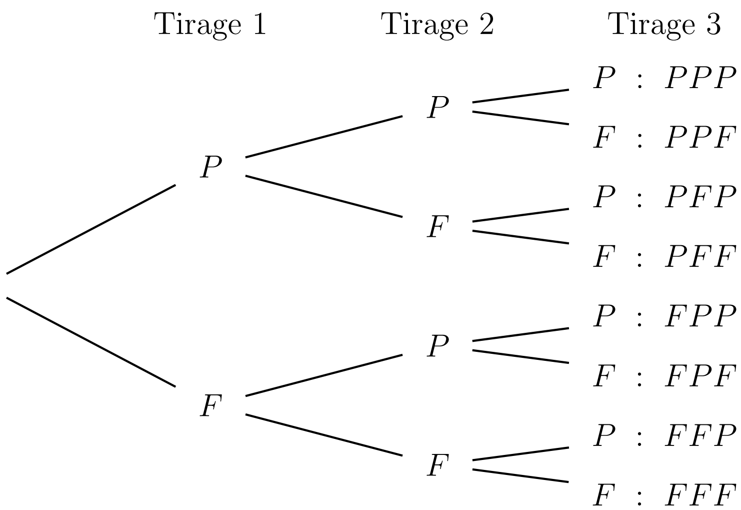


Exprimer mathématiquement l'évènement C : « ne pas pratiquer les deux activités » et déterminer sa probabilité. . . . .

Remarque. Le nombre à l'intersection de la colonne A et de la ligne B est $P(A \cap B)$. Le total de la colonne A est le nombre $P(A)$. Enfin, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Dénombrer avec un arbre

L'expérience consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie. On note le résultat sous la forme de trois lettres indiquant le résultat de chacun des trois tirages (par exemple, FPF signifie que l'on a obtenu face au premier tirage, pile au second et face au troisième). On modélise toutes les situations par un « arbre » :



Décrire par une liste l'évènement A : « obtenir deux piles » et déterminer sa probabilité.

Dénombrer par la « méthode des cases »

Lorsqu'une expérience est le résultat d'une succession d'expériences, on peut dénombrer le nombre d'issues favorables d'un évènement ou de l'univers en multipliant les nombres d'issues des experiences correspondantes :

Exemple. On tire de cartes, sans remise, au hasard dans un paquet de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire d'as ?

Ω : $\underset{\text{carte 1}}{\boxed{32}} \times \underset{\text{carte 2}}{\boxed{31}} = \underset{\text{total}}{992}$ issues. A : $\underset{\text{As 1}}{\boxed{4}} \times \underset{\text{As 2}}{\boxed{3}} = \underset{\text{total}}{12}$ issues.

Donc $P(A) =$ . . . .

4. Fluctuations d'échantillonage

Le principe du lien entre fréquence et probabilité est le suivant : on considère une expérience aléatoire et un évènement A : plus on répète l'expérience aléatoire, plus la fréquence d'apparition de l'évènement A s'approche de la probabilité de l'évènement A. Précisémment :

Théorème. On effectue n fois une expérience aléatoire et on note f la fréquence de réalisation de l'évènement A et p sa probabilité. Alors dans 95% des cas

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Exemple. On effectue, avant le second tour d'une élection présidentielle, un sondage sur un échantillon représentatif et sincère de 1000 personnes.
Un candidat obtient 54% d'intentions de vote et l'autre 46%
Peut on être certain à 95% que le candidat en tête va gagner ?

Exemple. On lance 400 fois une pièce et on obtient 224 fois face. Peut on être certain à 95%, que la pièce n'est pas équilibrée ?