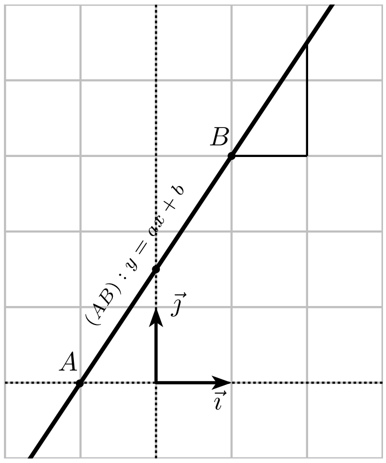
Chapitre 6 : Fonctions affines -10-01-12-
Seconde 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Équation réduite d'une droite



Théorème. Dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$. Alors la droite (AB) est l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'une des équations équivalentes

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

$$\Leftrightarrow y = ax + b \quad \text{avec} \begin{cases} a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ b = -ax_A + y_A \end{cases}$$

La seconde équation est l'*équation réduite de la droite* (AB), le nombre réel a est son *coefficient directeur* et le nombre réel b son *ordonnée à l'origine.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow A, B, M \text{ sont alignés} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow (x_B - x_A)(y - y_A) = (y_B - y_A)(x - x_A) \\ &\Leftrightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) + y_A \\ &\Leftrightarrow y = a \times (x - x_A) + y_A \\ &\Leftrightarrow y = ax - ax_A + y_A \\ &\Leftrightarrow y = ax + b \qquad \square \end{aligned}$$

Remarque. Dans le cas où $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$, ce raisonnement mène à l'équation $x = x_A$.

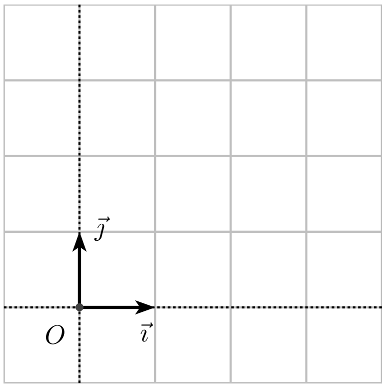
Propriété. Si $a, b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$ est une droite affine.

Preuve. On considère les points $A(0; b)$ et $B(1; a + b)$:
on a : $a\,x_A + b = a \times 0 + b = b = y_A$ et $a\,x_B + b = a \times 1 + b = a + b = y_B$ donc $A, B \in \mathcal{D}$.
La droite (AB) a pour équation $y = a'x + b'$ où

$$a' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = a + b - b1 - 0 = a \text{ et } b' = -a\,x_A + b = b,$$

donc par le théorème qui précède la droite (AB) est exactement l'ensemble $\mathcal{D}$. $\square$.

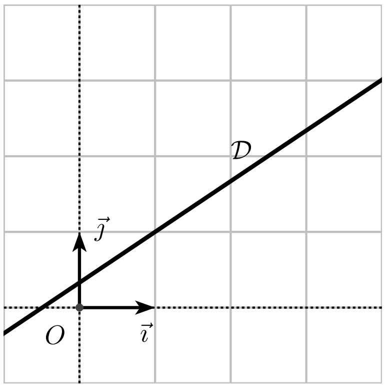
2. Tracé de droites ; lecture graphique d'équations de droites



Méthode. Pour tracer une droite d'équation $y = ax + b$ on choisit deux abscisses distinctes $x_A \neq x_B$ et on calcule les ordonnées correpondantes des points de la droite : $y_A = a\,x_A + b$ et $y_B = a\,x_B + b$. On place les deux points A et B dans le repère et on trace la droite (AB).

Exemple. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$.

x		
y		

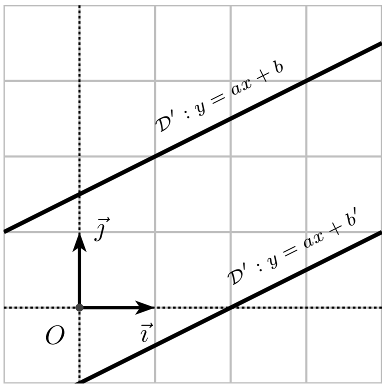


Méthode. Pour lire l'équation rédute d'une droite tracée dans un repère, on choisit deux points A et B sur la droite, de préférence avec des coordonnées simples, puis on utilise le théorème du paragraphe 1. pour déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Exemple. Déterminer l'équation de $\mathcal{D}$......................
....
....
....

A-t-on $C(0; 0,3) \in \mathcal{D}$?...
....
....

3. Équation d'une parallèle



Propriété. Dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur : $a = a'$.

Preuve. On choisit deux points sur $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{D}'$:
Les points $A(0; b)$ et $B(1; a + b)$ sont sur $\mathcal{D}$.
Les points $A'(0; b')$ et $B'(1; a' + b')$ sont sur $\mathcal{D}'$.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}(1; a)$ et $\overrightarrow{A'B'}(1; a')$ sont colinéaires, ce qui équivaut à : $a \times 1 = 1 \times a' \Leftrightarrow a = a'$. $\square$

Exemple. Dans le dernier exemple déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par O...
....
....
....
....

Les droites $\mathcal{D}$ est $\mathcal{D}''$: $y = -x$ sont-elles sécantes ?
....
....
....

4. Systèmes linéaires, intersections de droites

Dans ce paragraphe, on considère le système, d'inconnues x et y : $(S) : \left\{\begin{array}{l} mx + py = q \\ m'x + p'y = q' \end{array}\right.$

Théorème. Le système (S) admet un unique couple de solution si et seulement si les deux membres de gauche ne sont pas proportionnels : $mp' \neq m'p$. Dans le cas contraire, soit il admet une infinité de solutions (si $pq' = p'q$), soit il n'en admet aucune (si $pq' \neq p'q$).

Preuve. On suppose d'abord $p, p' \neq 0$. On remarque alors que

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} py = -mx + q \\ p'y = -m'x + q' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\dfrac{m}{p}x + \dfrac{q}{p} \\ y = -\dfrac{m'}{p'}x + \dfrac{q'}{p'} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = ax + b \text{ où } a = -\dfrac{m}{p};\ b = \dfrac{q}{p} \\ y = a'x + b' \text{ où } a = -\dfrac{m'}{p'};\ b = \dfrac{q'}{p'} \end{array}\right.$$

Les couples de solutions (x, y) s'interprétent donc comme les coordonnées des points d'intersections des droites D et D' d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Or ces droites se coupent en un point unique si et seulement si elles ne sont pas parallèles, si et seulement si

$$a \neq a' \Leftrightarrow \frac{m}{p} \neq \frac{m'}{p'} \Leftrightarrow mp' \neq m'p$$

Si p ou p' est nul, on peut résoudre (S) et vérifier que le théorème est vrai dans ce cas. $\square$

Exemple. Déterminer si les systèmes suivants admettent une solution unique :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right. \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{l} 4x - y - 2 = 0 \\ -2x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right. \quad (S_3) : \left\{\begin{array}{l} -x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right. \quad (S_4) : \left\{\begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right.$$

Résolution par substitution

On isole une inconnue dans une équation. Par exemple, x dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x = \boxed{2y} \end{array}\right.$$

On remplace (ou substitue) x par son expression en fonction de y (ici, $2y$) dans l'autre équation, afin de faire disparaître la variable x :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 \times \boxed{2y} - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6y - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y = 2 \\ x = 2y \end{array}\right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Résolution par combinaison

On multiplie la première équation par le coefficient de x dans la seconde et on multiplie la seconde équation par le coefficient de x dans la première, puis on soustrait les deux :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \times 3x - 1 \times 2y) = 1 \times 2 \\ 3 \times x - 3 \times 2y = 3 \times 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \times 3x - 3x - 2y - (-6y) = 2 - 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{array}\right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ 3x - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ 3x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{3} = 1 \end{array}\right.$$

Conclusion Le système admet un couple solution unique $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

5. Fonction affines

Définition. Une *fonction affine* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque b est nulle, la fonction est dite *linéaire*. Lorsque a est nul, la fonction est dite *constante*.

Remarque. Dans un repère, la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$. La droite est dite linéaire si $b = 0$. La droite est horizontale si $a = 0$. L'équation d'une droite verticale est de la forme $x = c$.

Propriété. Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$, constante si $a = 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.

Preuve. Pour tous réels u, v tels que $u < v$ on a :

• Si $a > 0$	• Si $a = 0$	• Si $a < 0$
$au < av$ donc $au + b < av + b$ d'où $f(u) < f(v)$. Donc f est strictement croissante.	$f(u) = b = f(v)$ Donc f est constante	$au > av$ donc $au + b > av + b$ d'où $f(u) > f(v)$. Donc f est strictement décroissante.

Propriété. Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Le signe de la fonction affine f défine par $f(x) = ax + b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Preuve. On remarque d'abord que $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.
On suppose $a > 0$. La fonction f est donc strictement croissante. Ainsi,

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) < 0 < f(x').$$

De même, si $a < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante :

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) > 0 > f(x'). \quad \square$$

Exemple. La règle des signes permet de trouver le signe d'un produit de fonctions affines : soit $f(x) = (2x - 7)(3 - x)$.
On résout d'abord $f(x) = 0 \iff 2x - 7 = 0$ ou $3 - x = 0 \iff x = \frac{7}{2}$ ou $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x - 7$		$-$ -signe de 2		$-$ -signe de 2	0	$+$ signe de 2	
$3 - x$		$+$ -signe de -1	0	$-$ signe de -1		$-$ signe de -1	
$(2x - 7) \times (3 - x)$		$-$ $\ominus \times \oplus$	0	$+$ $\ominus \times \ominus$	0	$-$ $\oplus \times \ominus$	

Une fois le tableau de signes dressé, on peut résoudre des inéquations :

$(2x - 7)(3 - x) < 0 \iff x \in]-\infty; 3[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$.