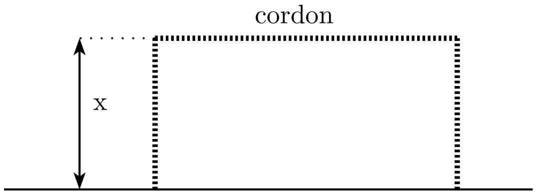
Contrôle 13 : Fonctions de référence -06-04-11-
Seconde 7, 2010-2011, Y. Angeli

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de ℓ mètres de long pour délimiter un rectangle de baignade surveillée. On note $S(x)$ la surface en mètres carrés du rectangle de baignade en fonction de la largeur x en mètres représentée sur la figure :



Partie A.

1. Exprimer la longueur du côté opposé au rivage en fonction de ℓ et x.
2. En déduire que S est définie pour $x \in [0, \ell/2]$, et que $S(x) = x(\ell - 2x)$.
3. Résoudre l'équation $S(x) = 0$.
4. On a représenté au dos la fonction S. Résoudre graphiquement $S(x) = 0$.
5. Déduire la longueur ℓ du cordon des deux questions précédentes.

Partie B.

À partir de la partie B, on admet que $S : [0, 180] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(360 - 2x)$.
Le maître nageur souhaite un rectangle de baignade d'au moins 9000 m^2.

1. Graphiquement, conjecturer pour quels x la surface du rectangle est de 9000 m^2.
2. Graphiquement, conjecturer pour quels x la surface du rectangle est d'au moins 9000 m^2.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0, 180]$, $S(x) - 9000 = 2(150 - x)(x - 30)$.
4. Résoudre $S(x) = 9000$ puis dresser le tableau de signes de $S(x) - 9000$.
5. Prouver les deux conjectures émises au début de la partie B.

Partie C.

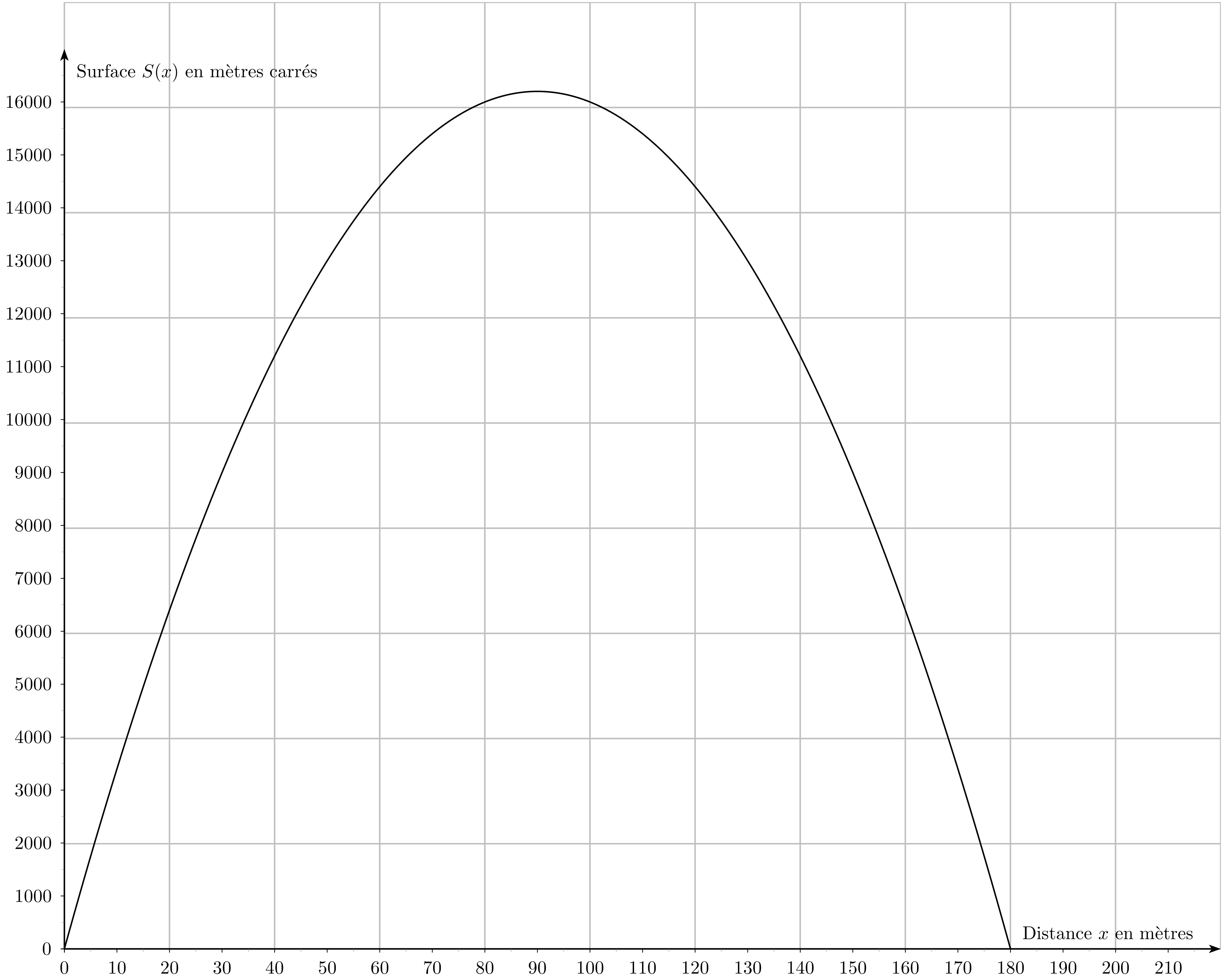
1. Quel est le nom de la courbe représentative de S ? Possède-t-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner une équation de cette droite.
2. Déterminer graphiquement le tableau de variations complet de S. En déduire la surface maximale du rectangle.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0, 180]$, $S(x) = 16200 - 2(x - 90)^2$.
4. Démontrer que S est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 90]$. Expliquer comment déduire le reste du tableau de la question C.1.

Partie D.

Pour des questions de sécurité, le maître nageur veut limiter la surface de la zone de baignade à 16000 m^2 au plus.

1. Calculer $S(80)$ et $S(100)$.
2. Déduire du tableau de variation de la partie C l'ensemble des solutions de l'équations $S(x) \leq 16000$.
3. Comment le maître nageur doit choisir x pour que $9000 \leq S(x) \leq 16000$?

Bonus. Quelle forme, autre que le rectangle permettrait d'obtenir une surface de baignade plus importante encore ? Préciser autant que possible.


Surface $S(x)$ en mètres carrés
16000
15000
14000
13000
12000
11000
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
Distance x en mètres
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210