Travaux pratiques 9 : Suite logistique -09-03-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Vers 1840, le mathématicien belge Verhulst a mis au point un modèle d'étude des populations. Si p_n représente un population au temps n, l'accroissement de cette population doit être proportionnel à p_n (nombre d'individus) et $P_{id} - p_n$ où P_{id} représente la population idéale. Ainsi, on a

$$p_{n+1} - p_n = c \times p_n \times (P_{id} - p_n) \Leftrightarrow p_{n+1} = c \times p_n \times (P_{max} - p_n)$$

La population maximale est $P_{max} = P_{id} + 1/c$ (sinon p_n pourrait devenir négative). Une étude du trinôme $cx(P_{max} - x)$ impose alors $c \in [0, 4/P_{max}]$. En divisant chaque membre par P_{max} et en posant $k = c/P_{max}$ et $u_n = p_n/P_{max}$, on se ramène à l'étude de la suite (u_n) définie par

$$\boxed{k \in [0,4],\ u_0 \in [0,1] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = k \times u_n \times (1 - u_n)}$$

1. Cas où $k = 1,5$ et $u_0 = 0,5$

1. Dans le tableur OpenOffice, remplir les cellules $J1$ par "$k =$ ", $K1$ par $1,5$, $J2$ par "n", $K2$ par u_n, $J3$ par 0 et $K3$ par $0,5$.
2. Programmer $J4$ pour que la cellule vaille un de plus que $J3$, programmer $K4$ pour que la cellule vaille u_1. Par un copier coller, remplir de même les cellules $J3$ à $K144$.
3. Représenter graphiquement les termes de la suite (n sur l'axe abscisse gradué de 0 à 140, u_n sur l'axe des ordonnées gradué de 0 à 1)
4. Compléter : *la population se stabilise à ....% de P_{max}.*

2. Variations de k

1. Construire une barre de défilement qui fait varier $A1$ de 0 à 400 (Affichage > barre d'outils > Contrôle de formulaires ; cliquer sur l'icône "(Des)activer le mode de conception" une fois la barre définie.) Remplacer $K1$ par $= A1/100$. Observer l'évolution du graphique avec k.
2. Completer :
   ⋆ La population s'éteindra si $k \in$ ....
   ⋆ La population se stabilise si $k \in$ ....
   ⋆ La population finit par osciller près de deux valeurs si $k \in$ ....
   ⋆ La population finit par osciller près de quatre valeurs ou plus si $k \in$....
   ⋆ La population devient chaotique pour la plupart des $k \in$..............
   ⋆ La population finit par osciller près de trois valeurs si $k =$ ....

3. Effet papillon

L'*effet papillon* est une expression qui exprime le phénomène de sensibilité aux conditions initiales en théorie du chaos : “Un simple battement d'ailes d'un papillon peut-il déclencher une tornade à l'autre bout du monde ?”

1. Construire une barre de défilement qui fait varier $A2$ entre 0 et 100, remplacer $K3$ par $= A2/100$. Observer l'évolution du graphique avec u_0.
2. Compléter :
   ⋆ Le comportement de (u_n) dépend peu de u_0 si $k \in$ ....
   ⋆ Le comportement de (u_n) dépend beaucoup de u_0 si $k \in$ ....
3. On suppose que $k = 4$ et $u_0 = 0,75$ à $0,01$ près. Peut on prévoir raisonnablement l'évolution de la population ? Pourquoi ?

   ....

   ....

   ....

4. Bonus : comportement asymptotique de (u_n) en fonction de k

1. Mettre k à 0. Définir $L1$ comme $= K1 + 0,01$, puis copier la colonne $K3 : K144$ sur $L3 : L144$.
2. Copier la colonne L sur les colonnes M à OV.
3. Afficher un graphique dont les valeurs sont en lignes $K1 : OV1; K135 : OV144$ avec k en abscisse (gradué de 0 à 4) et les valeurs asymptotiques de la suite en ordonnée (graduée de 0 à 1). Ne pas afficher de légende, être patient.

5. Bonus : Limites possibles

On suppose que la suite (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la limite de (u_{n+1}) ? De la suite de terme général $k \times u_n \times (1-u_n)$?
2. En déduire que **si** la suite converge, elle converge vers l'une des deux solutions de l'équation d'inconnue ℓ : $0 = k\ell\left(1 - \frac{k-1}{k}\ell\right)$
3. Relier ce résultat aux observations de la partie 2.