Feuille d'exercices 7 : Produit scalaire -30-03-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Distance d'un point à une droite

La distance $d(A, \mathcal{D})$ d'un point A à une droite $\mathcal{D}$ est défini comme la distance de A à la projection orthogonale H du point A sur la droite $\mathcal{D}$.
Le plan est munis d'un un repère orthonormé.

1. Montrer que $d(A, \mathcal{D}) < AM$ pour tout point $M \in \mathcal{D}$ différent de H.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire $\mathcal{P}$ à $\mathcal{D}$ passant par $A(5, 1)$. (on pourra écrire une condition pour que $M(x, y) \in \mathcal{P}$)
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$.

2. Tangente à un cercle

Une droite est tangente à un cercle si et seulement si elle le coupe en un unique point.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ et $\mathcal{D}$ une droite.

1. On suppose que $d(O, \mathcal{D}) > r$. Montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas tangente à $\mathcal{C}$.
2. On suppose que $d(O, \mathcal{D}) < r$. Montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas tangente à $\mathcal{C}$.
3. On suppose que $d(O, \mathcal{D}) = r$. On note H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en H.
4. Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en H si et seulement si $[OH]$ est un rayon perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

3. Tangentes à un cercle issues d'un point

1. Soient A et B deux points distincts du plan. Quel est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?
2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A un point du plan. Montrer qu'une droite passant par A est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en un point M si et seulement si M appartient à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle de diamètre $[OA]$.
3. Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(0, 1)$ et de rayon un. Déterminer une équation du cercle (trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x, y) \in \mathcal{C}$).
4. Déterminer les équations des tangentes au cercle passant par $A(-1, -1)$.