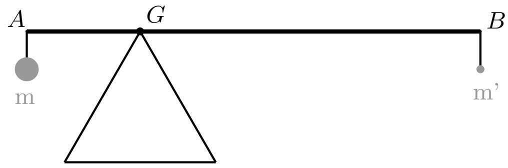
Feuille d'exercices 5 : barycentre de deux points -05-01-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Sur une tige de masse négligeable, on suspend une masse m à l'extrémité A et une masse m' à l'extrémité B.
L'expérience montre que l'ensemble est en équilibre pour la position du pivot en G tel que $m\ GA = m'\ GB$.



On dit que G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, m), (B, m')\}$.

1. Traduire la relation $m\ GA = m'\ GB$ par une égalité vectorielle.
2. Dans le schéma, l'équilibre est obtenu avec $m = 9\ kg$. Calculer m'.
3. Les masses sont $m = 8\ kg$ et $m' = 2\ kg$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{GB}$.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Représenter G sur $\overrightarrow{AB}$.
4. Démontrer que si G est le milieu de $[AB]$, alors $m = m'$.
5. Quelle relation a-t-on entre m et m' si $AG = 3\text{dm}$ et $AB = 1\text{m}$?
6. On admet que m et m' peuvent prendre des valeurs négatives (par un système de poulies, par exemple). À quelle condition peut on définir le barycentre de $\{(A, m), (B, m')\}$?
7. Démontrer la propriété d'homogénéité du barycentre : si $k \neq 0$, G est le barycentre de $\{(A, m), (B, m')\}$ si et seulement si G est le barycentre de $\{(A, km), (B, km')\}$
8. Soit G le barycentre de $\{(A, m), (B, m')\}$. Démontrer que pour tout point M du plan, on a $m\overrightarrow{MA} + m'\overrightarrow{MB} = (m + m')\overrightarrow{MG}$.
9. On étend le barycentre à un système de 3 points : si $m + m' + m'' \neq 0$, le barycentre G de $\{(A, m), (B, m'), (C, m'')\}$ est défini par
$$m\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{GB} + m''\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$
   Démontrer la propriété d'associativité : si $m + m' \neq 0$, G est le barycentre de $\{(H, m + m'), (C, m'')\}$ où H est le barycentre de $\{(A, m), (B, m')\}$.