Devoir Maison 6 : pour le -10-05-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Soit M un point du plan, $\mathcal{C}$ un cercle et $\mathcal{S}$ une droite coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. La *puissance* du point M pour le cercle $\mathcal{C}$ est le nombre réel $\mathcal{C}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

1. La puissance ne dépend pas de la sécante choisie

On utilise les notations de l'encadré et on note A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A, et O le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon.

1. Faire une figure générale (éviter les cas où $M = O$, $M \in \mathcal{C}$...)
2. Donner, un justifiant une mesure de l'angle $\widehat{ABA'}$.
3. En déduire $\mathcal{C}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2$. (Chasles ?)
4. À partir de la dernière formule, prouver :
   (a) $\mathcal{C}(M)$ ne dépend pas de la sécante (AB) de la définition.
   (b) $M \in \mathcal{C} \iff \mathcal{C}(M) = 0$. M intérieur à $\mathcal{C} \iff \mathcal{C}(M) < 0$. M extérieur à $\mathcal{C} \iff$ ....
   (c) Si (MT) est tangente à $\mathcal{C}$ en T, $\mathcal{C}(M) = MT^2$. (Faire une figure. Pythagore ?)

2. Critère de cocyclicité

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts tels que (AB) et (CD) soient sécantes en un point M (distinct de ces quatre points)

1. On suppose A, B, C, D cocycliques. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
2. On suppose que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
3. Montrer que pour tout point E du plan, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$.
4. On suppose que E est un point d'intersection du cercle circonscrit à (ABC) et de (MC). À l'aide de ce qui précède, montrer que $E = D$.
5. En déduire que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

3. Axe radical

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques de centres respectifs O et O', de rayons respectifs R et R'. On note I le milieu de $[OO']$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M) \iff 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IM} = R^2 - R'^2$. (Partir de la dernière formule de 1.3, utiliser une identité remarquable, Chasles, et la formule de réduction pour le milieu.)
2. Soit K l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{R^2 - R'^2}{2OO'^2}\overrightarrow{OO'}$.
   Montrer que $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M) \iff 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$
3. En déduire que le lieu des points M tels que $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M)$ est la droite passant par K perpendiculaire à (OO'). On l'appel l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
4. Lorsque les cercles ont des points communs, montrer que ces points sont sur l'axe radical. En déduire une construction de l'axe radical dans ce cas.
5. En déduire que si trois cercles se coupent en plus d'un point, leurs centres sont alignés.
6. Montrer que lorsque les centres de trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et $\mathcal{C}''$ sont non alignés, les trois axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ et $\Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$ sont concourants.
7. En déduire une construction de l'axe radical de deux cercles sans points communs.