Devoir Maison 5 : pour le -05-04-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre s_n comme la somme des carrés des entiers consécutifs de 1 à n.

$$\boxed{s_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2}$$

1. Étude de la suite (s_n)

1. Démontrer que la suite (s_n) est strictement croissante.
2. En utilisant le théorème d'encadrement, démontrer que la suite (s_n) diverge vers $+\infty$.

2. Programmation de la suite (s_n)

Écrire l'algorithme d'un programme qui demande à l'utilisateur la saisie d'un entier naturel n et affiche ensuite la valeur du terme de rang n de la suite (s_n). Utiliser ce programme pour donner la valeur de s_{100}.

3. Forme explicite de (s_n)

Soit P définie par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. Développer l'écriture de $P(x+1)$ puis écrire $P(x+1) - P(x)$ en regroupant les termes suivant les puissances de x.
2. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que pour tout réel x on ait $P(x+1) - P(x) = x^2$ et $P(1) = 0$. (identification ?)
3. En déduire que $s_n = P(n+1)$ pour tout entier naturel n.
4. Factoriser $P(x+1)$. (factorisation d'un trinôme ?) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de s_n sous forme d'un produit de trois facteurs.

4. Somme des cubes

1. Adapter les questions 3.1, 3.2, 3.3 pour calculer $u_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.
2. Donner l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $v_n = 0 + 1 + 2 + ... + n$.
3. Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ calculer u_n et v_n.
4. Conjecturer un lien entre les deux suites et le prouver. En déduire une écriture factorisée des termes de (u_n).