Devoir Maison 4 : pour le -08-03-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Caractérisation d'une bissectrice

On rappelle qu'une droite $\mathcal{D}$ est tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O en M si et seulement si $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ et (OM) est perpendiculaire à la droite.
Soient O et M deux points distincts du plan, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites concourantes en O, P et P' les projetés orthogonaux respectifs de M sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1. Faire une figure (à compléter).
2. Exprimer $\sin(\widehat{POM})$ et $\sin(\widehat{P'OM})$.
3. En déduire que (OM) est la bissectrice de $\widehat{POP'} \Leftrightarrow PM = P'M$.

2. Point de concours des bissectrices

Dans un triangle ABC, Soient A', B', C' les pieds respectifs des bissectrices intérieures de $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Soit I le point d'intersection de (AA') et (BB'). Soient P, Q, R les projetés orthogonaux de I sur (BC), (CA) et (AB).

1. Montrer que $IP = IQ = IR$.
2. En déduire que (CC') passe par I. Quelle propriété retrouve-t-on ?
3. Montrer que I est le centre du cercle inscrit à ABC.

3. Le point de concours comme barycentre

Dans un triangle ABC, on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
Soit J le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

1. Démontrer que $(a + b + c)\overrightarrow{AJ} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.
2. Soient B'' et C'' les images de A par les translation de vecteurs respectifs $\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ et $\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. Calculer $||\overrightarrow{AC''}||$ et $||\overrightarrow{AB''}||$.
3. Démontrer que le quadrilatère $AC''JB''$ est un losange. En déduire que J est sur la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$.
4. En permutant les rôles de A, B, C dans la démonstration précédente, que pourrait on démontrer ? (on ne demande pas d'écrire la preuve).
5. En déduire que le centre du cercle inscrit à ABC est le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.