

DEVOIR MAISON 2 : POUR LE -09-11-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Objectif : construire un pentagone régulier.

1. RELATION ENTRE $\cos \alpha$ ET $\cos(2\alpha)$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note \mathcal{C} le cercle trigonométrique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et les points I, M, N de coordonnées polaires respectives $[1, 0]$, $[1, \alpha]$, et $[1, 2\alpha]$.

1. Donner les coordonnées cartésiennes de N , en déduire $NI = \sqrt{2(1 - \cos(2\alpha))}$.
2. Dans OIN , pourquoi (OM) est-elle la bissectrice de l'angle \hat{O} ? Quelle est la nature de OIN ? En déduire que (OM) est la médiatrice de $[NI]$.
3. Soit K le milieu de $[NI]$. Dans KIO , montrer $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$.
4. En déduire $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$.

2. CALCUL DE $\cos \frac{2\pi}{5}$

Soit $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ et I, A, B, C, D de coordonnées polaires respectives $[1, 0]$, $[1, \alpha]$, $[1, 2\alpha]$, $[1, 3\alpha]$, $[1, 4\alpha]$

1. Soit \mathcal{R} la rotation de centre O et d'angle α . Si M a pour coordonnées polaires $[\rho, \theta]$, quelles seront les coordonnées polaires de son image $M' = \mathcal{R}(M)$ par la rotation?
2. Déterminer $O' = \mathcal{R}(O)$, $I' = \mathcal{R}(I)$, $A' = \mathcal{R}(A)$, $B' = \mathcal{R}(B)$, $C' = \mathcal{R}(C)$ et $D' = \mathcal{R}(D)$.
3. Montrer que $\vec{OI} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{O'I'} + \vec{O'A'} + \vec{O'B'} + \vec{O'C'} + \vec{O'D'}$.
4. En déduire $\vec{OI} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.
5. Déduire de ce qui précède que $1 + 2 \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha = 0$.
6. Soit $x = \cos \alpha$. Montrer que $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
7. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

3. CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE RÉGULIER

Dans un repère orthonormé (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) d'unité 10cm , soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique et $K(-1, 0)$, L le milieu de $[OK]$, I l'intersection du cercle de centre L et de rayon $[LJ]$, N le milieu de $[OM]$. La médiatrice de $[OM]$ coupe le cercle \mathcal{C} en A et B (OIA direct).

1. Calculer les distances LJ, OM et ON .
2. En déduire $(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{5}$.
3. Expliquer pourquoi $[AI]$ est le côté d'un pentagone régulier.
4. Compléter la figure.