Devoir Maison 1 : pour le -18-10-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

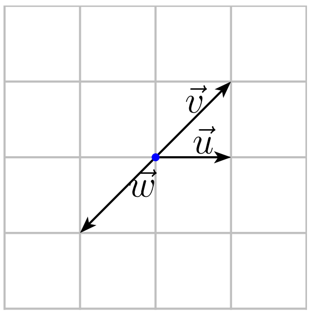
Objectif : démontrer et appliquer le théorème des points cocycliques.

1. Démonstration du théorème de l'angle inscrit

Dans le plan on considère A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soit M un point quelconque du plan distinct de A et de B et O.

1. Faire une figure dans un cas où $M \in \mathcal{C}$, et une autre dans un cas où $M \notin \mathcal{C}$.
2. Démontrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi - ((\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})) \mod 2\pi$.
3. Démontrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi - ((\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})) \mod 2\pi$.
4. Démontrer que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) \mod 2\pi \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$. (On pourra pour cela étudier la nature du triangle OBM.
5. Démontrer une propriété analogue dans le triangle OMA.
6. Déduire de ce qui précède le théorème de l'angle inscrit, à savoir : soient A, B deux points d'un cercle de centre O. Un point M distinct de A et B appartient au cercle si et seulement si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod 2\pi$..

2. Interlude : mesures d'angle modulo π et modulo 2π



1. Dans la figure ci-contre, donner la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{w})$.
2. En déduire $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) \mod \pi$.

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. En revenant à la définition de mod , montrer que $2(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \mod 2\pi \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\theta}{2} \mod \pi$
3. Montrer par un contre-exemple qu'il est faux d'écrire :

$$2(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \mod 2\pi \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\theta}{2} \mod 2\pi$$

3. Démonstration du théorème des points cocycliques

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts. On dit qu'ils sont cocycliques si et seulement s'ils appartiennent à un même cercle.

1. Faire une figure dans le cas où A, B, C et D sont cocycliques.
2. Démontrer que si A, B, C et D sont cocycliques, alors
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \mod \pi$$
(on pourra noter O le centre du cercle circonscrit à ABC et utiliser le théorème de l'angle inscrit)
3. Prouver A, B, C et D alignés implique $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \mod \pi$.
4. Si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 0 \mod \pi$, que dire de A, B, C et D ?
5. Si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \neq 0 \mod \pi$, on note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) dire pourquoi ce triangle n'est pas aplati).
   (b) Démontrer qu'alors les points A, B, C et D sont cocycliques. (indication : théorème de l'angle inscrit).
6. En déduire que quatre points A, B, C et D deux à deux distincts sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \mod \pi$.

4. Droite de Simson

Soient A, B, C trois points non alignés et M un point distinct de A, B et C. Soient A', B' et C' les projetés orthogonaux de M sur respectivement (BC), (AC) et (AB).

1. Faire une figure dans un cas où $M \in \mathcal{C}$, et une autre dans un cas où $M \notin \mathcal{C}$.
2. (a) Quel est le diamètre du cercle circonscrit à $AB'C'$? Représenter ce cercle sur la figure.
   (b) Quel est le diamètre du cercle circonscrit à $MB'C'$?
   (c) En déduire que $(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'M}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}) \mod \pi$.
   (d) Pourquoi peut-on affirmer que $(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'M}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) \mod \pi$?
3. Par un raisonnement semblable, prouver : $(\overrightarrow{C'M}, \overrightarrow{C'A'}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) \mod \pi$.
4. De ce qui précède, déduire : $(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) \mod \pi$.
5. Prouver finalement que A, B, C et M sont cocycliques si et seulement si A', B' et C' sont alignés. (lorsqu'ils sont alignés, ces points forment la droite dite de Simson - un mathématicien écossais du XVIIIème siècle).