Contrôle 8 : Barycentres -01-02-11-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Exercice 1. Théorème de Varignon

Une *médiane* d'un quadrilatère quelconque est un segment joignant les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère.
Démontrer que les deux médianes d'un quadrilatère se coupent en leurs milieux. Démontrer également que le milieu du segment d'extrémités les milieux des deux diagonales du quadrilatère est le point de concours de ses médianes.

Exercice 2. Centre d'inertie

Représenter, en justifiant la construction, le centre d'inertie d'un disque homogène de rayon $6cm$ comportant un trou circulaire de rayon 3cm centré au milieu d'un rayon du disque.

Exercice 3. Lieux de points

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. On rappelle que la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants de ses deux extrémités.

1. Soit G le barycentre de $\{(A,-3),(B,2),(C,2)\}$. Justifier l'existence du point G et faire une figure en expliquant la construction.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que A, I et G sont alignés.
3. Décrire et représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que
$$||-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{IG}||.$$
4. Décrire et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que
$$||-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||.$$
5. Décrire et représenter l'ensemble $\mathcal{D}'$ des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires et de même sens.

Exercice 4. Une courbe de Bézier particulière

Dans un repère orthonormé, soient $A(0,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,0)$. Soit $t\in\mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence et déterminer les coordonnées de D_t le barycentre de $\{(A,1-t),(B,t)\}$ et E_t le barycentre de $\{(B,1-t),(C,t)\}$.
2. Montrer que les coordonnées du barycentre G_t de $\{(D_t,1-t),(E_t,t)\}$ sont $x=2t$ et $y=4t^2-4t$.
3. En déduire que le lieu des points G_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ est la parabole d'équation $y=x^2-2x$.