Contrôle 6 : Dérivées et le reste -17-12-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

Exercice 1.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 + \cos x) \cos x$

1. Démontrer que pour tout x, $h(x+2\pi) = h(x)$. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.
2. Démontrer que pour $x \in R$, $h'(x) = -(1 + 2\cos x) \sin x$
3. Résoudre $1 + 2\cos x = 0$ puis $1 + 2\cos x > 0$ sur $[-\pi, \pi]$.
4. Dresser le tableau de signe de h' sur $[-\pi, \pi]$. (une ligne par facteur !)
5. Dresser en dessous le tableau de variations de h.
6. Construire soigneusement la courbe représentative de h dans un repère où 1cm représente $\dfrac{\pi}{3}$ en abscisse et 0.25 en ordonnée, pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, et $M \in \mathcal{H}$ un point d'abscisse $x_0 \neq 0$. On note T la tangente à $\mathcal{H}$ en M.

1. Quelle est l'ordonnée de M ?
2. Rappeler la formule de la dérivée de la fonction inverse, et en déduire que l'équation de T est $y = -\dfrac{1}{x_0^2}\,x + \dfrac{2}{x_0}$.
3. Déterminer les coordonnées du point A, intersection de T et de l'axe des abscisses puis les coordonnées du point B, intersection de T et de l'axe des ordonnées.
4. Calculer l'aire du triangle AOB et montrer qu'elle ne dépend pas de la position de M sur $\mathcal{H}$.

Exercice 3.

Une parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, sa tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$. Quelle est l'équation de la parabole ?

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé d'unité 2cm, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}$, et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étude du centre de symétrie.
   (a) Soit $M \in \mathcal{C}$ d'abscisse $x \neq 0$ et $M' \in \mathcal{C}$ d'abscisse $-x$. Quelle est l'ordonnée de M ? de M' ?
   (b) Déterminer les coordonnées du centre de $[MM']$.
   (c) En déduire que la courbe possède un centre de symétrie I dont on précisera les coordonnées.
3. Étude de l'asymptote.
   (a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   (b) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont presques confondues en x si $\left|f(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-1}$.
   Expliquer pourquoi cela équivaut à $-10^{-1} < f(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) < 10^{-1}$.
   (c) Pour quels x les courbes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont presque confondues ?
4. Étude de tangentes et des variations.
   (a) Pour tout $x \neq 0$, montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{4x^2}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ dont les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x$.
   (c) Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ dont les tangentes sont horizontales.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter soigneusement les tangentes, $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{C}$.