Chapitre 8 : Produit scalaire -28-03-11-
Première S 1, 2010-2011, Y. Angeli

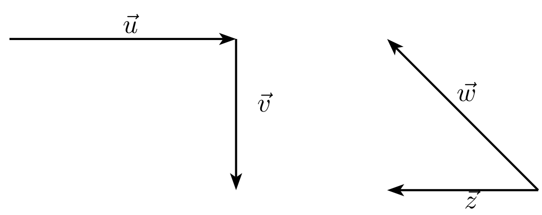
1. Définition, caractérisation de l'orthogonalité

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

⚠ le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de deux vecteurs est un **nombre** !

Exemple. Déterminer graphiquement les produits scalaires suivants :



$\vec{u}\cdot\vec{v} =$ .... $\vec{z}\cdot\vec{w} =$ ....
$\vec{u}\cdot\vec{w} =$ .... $\vec{z}\cdot\vec{v} =$ ....
$\vec{u}\cdot\vec{z} =$ .... $\vec{z}\cdot\vec{z} =$ ....
$\vec{u}\cdot\vec{u} =$ .... $\vec{v}\cdot\vec{w} =$ ....

Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit *orthogonaux* si et seulement si l'un est nul ou si leurs directions sont deux droites orthogonales. (entre nous on abergera $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux par $\vec{u}\perp\vec{v}$).

Propriété. $\vec{u}\perp\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Preuve. Cas où $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. Soit A un point du plan, B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ et C l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$. Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$\Longrightarrow$: On suppose que $\vec{u}\perp\vec{v}$ ....
....
....

$\Longleftarrow$: On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ....
....
....

Cas où $\vec{u} = 0$: ....

Le cas où $\vec{v} = 0$ est identique. Conclusion : ....

2. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve. Les coordonnée de $\vec{u} + \vec{v}$ sont :

$||\vec{u}|| =$ $||\vec{v}|| =$ $||\vec{u} + \vec{v}|| =$

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Où est intervenue l'hypothèse du repère orthonormé ?

Exemple. Démontrer que les droites d'équation $y = 3x + 2$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$ sont perpendiculaires.

Exemple. Déterminer l'équation réduite de la perpendiculaire à $y = 1,5x + 2$ qui passe par $A(1, 3)$. (donner une condition nécessaire et suffisante sur $M(x, y)$ pour que (AM) soit perpendiculaire à cette droite).

3. Produit scalaire et angles orientés

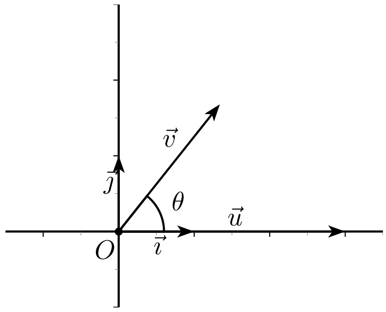
> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'angle orienté $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) \mod 2\pi$. Alors :
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta$$

Preuve. On choisit un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires et de même sens. Soient N l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$ et M l'image de O par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Coordonnées cartésiennes de N :

Coordonnées polaires, puis cartésiennes de M :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} =$



Où est intervenue l'hypothèse $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ?

Exemple. À partir des vecteurs représentés à la première page, déterminer les angles orientés suivants :

$(\vec{u}, \vec{v}) =$	$(\vec{z}, \vec{w}) =$ ....
$(\vec{u}, \vec{w}) =$	$(\vec{z}, \vec{v}) =$ ....
$(\vec{u}, \vec{z}) =$	$(\vec{v}, \vec{w}) =$ ....

Exemple. Dans un repère orthonormé soient $\vec{u}\left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ et $\vec{v}\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$. En calculant de deux manières le produit scalaire de ces deux vecteurs, déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

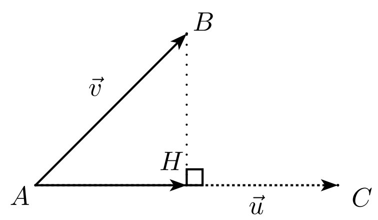
4. Propriétés

Théorème. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel λ, on a les propriétés de
⋆ Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
⋆ Homogénéité : $\vec{u}, \vec{v}$, $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$
⋆ Bilinéarité : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
⋆ Positivité : $||u||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

Preuve. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ et $\vec{v}(x'', y'')$.
Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
Homogénéité : $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda(xx' + yy') = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v}$. On obtient la dernière égalité par symétrie.
Bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v} = (x+x'')x'+(y+y'')y' = xx'+yy'+x''x'+y''y' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{v}$.
On obtient linéarité à droite par symétrie.
Positivité : $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ par positivité de la norme. Comme la norme d'un vecteur est nulle si et seulement si c'est le vecteur nul, on obtient la dernière assertion.

Projeté orthogonal.
Soient A et C deux points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$



Preuve. On utilise la relation de Chasles et la linéarité du produit scalaire :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

Exemple. Déterminer les coordoonnées du projeté orthogonal de $B(3, 4)$ sur la droite d'équation $y = x$.

5. Application : relations métriques dans le triangle

Les deux démonstrations de ce paragraphe reposent sur :

- ⋆ $||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2$ où $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- ⋆ l'introduction de points par la relation de Chasles.
- ⋆ l'identité remarquable : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (à prouver !)

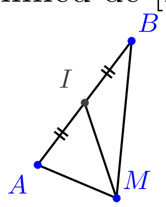
Théorème. Formule d'Al Kashi. Soit ABC un triangle avec $a = AB$, $b = AC$ et $c = AB$. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Preuve.

Théorème. (de la médiane). Soit MAB un triangle et I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{array}{llcl}
\boxed{1} & MA^2 + MB^2 & = & 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2 \\
\boxed{2} & MA^2 - MB^2 & = & 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MA} \\
\boxed{3} & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} & = & MI^2 - IA^2
\end{array}$$



Preuve.

6. Application : formules de dupication

Théorème. Soient a et b deux réels. On a :

$$\begin{array}{rrcl}
\boxed{1} & \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \\
\boxed{2} & \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \\
\boxed{3} & \sin(a+b) & = & \cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b) \\
\boxed{4} & \sin(a-b) & = & \cos(a)\sin(b)-\sin(a)\cos(b) \\
\boxed{5} & \cos(2a) & = & \cos^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)=2\cos^2 a-1 \\
\boxed{6} & \sin(2a) & = & 2\cos(a)\sin(a)
\end{array}$$

Preuve. $\boxed{2}$ Soient A et B les points d'un repère orthonormé direct de coordonnées polaires respectives $[1,a]$ et $[1,b]$.

Coordonnées cartésiennes de A : de B :

Calculer de deux manières le produit scalaire de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$, en déduire $\boxed{2}$:

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=$ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=$

Conclusion :

En remplaçant b par $-b$, sachant $\cos(b)=\cos(-b)$, $\sin(b)=-\sin(b)$, on a $\boxed{1}$.
On en déduit $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$, sachant $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$. Par exemple :
$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(-b)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

En déduire $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$

Exemple. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\,\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.