

CHAPITRE 8 : PRODUIT SCALAIRE -28-03-11-
Première S 1, 2010-2011, Y. Angeli

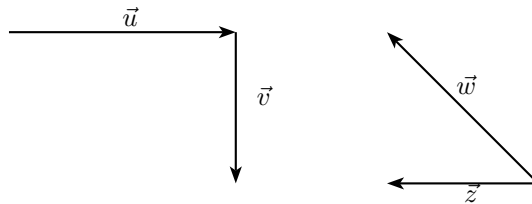
1. DÉFINITION, CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ

Le *produit scalaire* de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$$

⚠ le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs est un **nombre** !

Exemple. Déterminer graphiquement les produits scalaires suivants :



- | | |
|---|---|
| $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ | $\vec{z} \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$ |
| $\vec{u} \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$ | $\vec{z} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ |
| $\vec{u} \cdot \vec{z} = \dots\dots\dots$ | $\vec{z} \cdot \vec{z} = \dots\dots\dots$ |
| $\vec{u} \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$ | $\vec{v} \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$ |

Définition. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dit *orthogonaux* si et seulement si l'un est nul ou si leurs directions sont deux droites orthogonales. (entre nous on abergera \vec{u} et \vec{v} orthogonaux par $\vec{u} \perp \vec{v}$).

Propriété. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Preuve. Cas où $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soit A un point du plan, B l'image de A par la translation de vecteur \vec{u} et C l'image de B par la translation de vecteur \vec{v} . Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

\implies : On suppose que $\vec{u} \perp \vec{v}$

.....

.....

\impliedby : On suppose que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

.....

.....

Cas où $\vec{u} = \vec{0}$:

Le cas où $\vec{v} = \vec{0}$ est identique. Conclusion :

2. PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Dans un repère orthonormé, soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont :

$$\|\vec{u}\| =$$

$$\|\vec{v}\| =$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| =$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Où est intervenue l'hypothèse du repère orthonormé ?

Exemple. Démontrer que les droites d'équation $y = 3x + 2$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$ sont perpendiculaires.

Exemple. Déterminer l'équation réduite de la perpendiculaire à $y = 1,5x + 2$ qui passe par $A(1, 3)$. (donner une condition nécessaire et suffisante sur $M(x, y)$ pour que (AM) soit perpendiculaire à cette droite).

3. PRODUIT SCALAIRE ET ANGLES ORIENTÉS

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls d'angle orienté $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$. Alors :

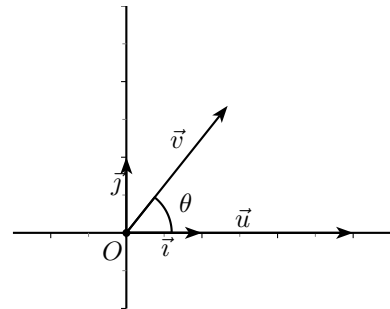
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

Preuve. On choisit un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que \vec{i} et \vec{u} soient colinéaires et de même sens. Soient N l'image de O par la translation de vecteur \vec{u} et M l'image de O par la translation de vecteur \vec{v} .

Coordonnées cartésiennes de N :

Coordonnées polaires, puis cartésiennes de M :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} =$$



Où est intervenue l'hypothèse \vec{u} et \vec{v} non nuls ?

Exemple. À partir des vecteurs représentés à la première page, déterminer les angles orientés suivants :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) &= \dots\dots\dots & (\vec{z}, \vec{w}) &= \dots\dots\dots \\ (\vec{u}, \vec{w}) &= \dots\dots\dots & (\vec{z}, \vec{v}) &= \dots\dots\dots \\ (\vec{u}, \vec{z}) &= \dots\dots\dots & (\vec{v}, \vec{w}) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Exemple. Dans un repère orthonormé soient $\vec{u} \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ et $\vec{v} \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$. En calculant de deux manières le produit scalaire de ces deux vecteurs, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

4. PROPRIÉTÉS

Théorème. Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et tout réel λ , on a les propriétés de

★ Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

★ Homogénéité : $\vec{u}, \vec{v}, (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$

★ Bilinearité : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

★ Positivité : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Preuve. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ et $\vec{v}(x'', y'')$.

Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Homogénéité : $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda(xx' + yy') = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v}$. On obtient la dernière égalité par symétrie.

Bilinearité : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = (x+x'')x' + (y+y'')y' = xx' + yy' + x''x' + y''y' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$.

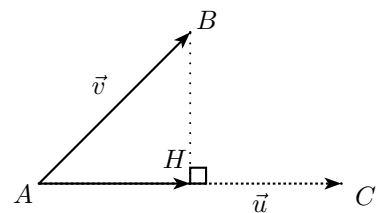
On obtient linéarité à droite par symétrie.

Positivité : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ par positivité de la norme. Comme la norme d'un vecteur est nulle si et seulement si c'est le vecteur nul, on obtient la dernière assertion.

Projeté orthogonal.

Soient A et C deux points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de B sur (AC) . Alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}$$



Preuve. On utilise la relation de Chasles et la linéarité du produit scalaire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$$

Exemple. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $B(3, 4)$ sur la droite d'équation $y = x$.

5. APPLICATION : RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

Les deux démonstrations de ce paragraphe reposent sur :

- ★ $||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2$ où $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- ★ l'introduction de points par la relation de Chasles.
- ★ l'identité remarquable : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (à prouver !)

Théorème. Formule d'Al Kashi. Soit ABC un triangle avec $a = AB$, $b = AC$ et $c = BC$. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

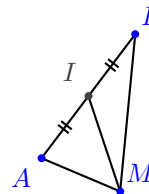
Preuve.

Théorème. (de la médiane). Soit MAB un triangle et I le milieu de $[AB]$.

$$\boxed{1} \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\boxed{2} \quad MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{MA}$$

$$\boxed{3} \quad \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$$



Preuve.

6. APPLICATION : FORMULES DE DUPLICATION

Théorème. Soient a et b deux réels. On a :

$$\boxed{1} \quad \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\boxed{2} \quad \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\boxed{3} \quad \sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b)$$

$$\boxed{4} \quad \sin(a - b) = \cos(a) \sin(b) - \sin(a) \cos(b)$$

$$\boxed{5} \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2 \sin^2(a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\boxed{6} \quad \sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$$

Preuve. $\boxed{2}$ Soient A et B les points d'un repère orthonormé direct de coordonnées polaires respectives $[1, a]$ et $[1, b]$.

Coordonnées cartésiennes de A :

de B :

Calculer de deux manières le produit scalaire de \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OA} , en déduire $\boxed{2}$:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \quad \quad \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} =$$

Conclusion :

En remplaçant b par $-b$, sachant $\cos(b) = \cos(-b)$, $\sin(b) = -\sin(-b)$, on a $\boxed{1}$.

On en déduit $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$, sachant $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. Par exemple :

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(-b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En déduire $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$

Exemple. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.