CHAPITRE 7 : SUITES NUMÉRIQUES -01-03-11-
Première S 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Une *suite numérique* (u_n) est une fonction définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou sur les entiers supérieurs à un entier donné) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n par la suite (u_n) se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* numéro n de la suite Le nombre n est appelé *indice* ou *rang* du terme u_n.

Remarque. On note traditionnellement la variable d'une suite n (ou m, p, q) et on réserve le x ou le t pour les variables de fonctions définies sur des intervalles. La suite est notée entre paranthèses (u_n) et un terme de la suite, sans paranthèse : u_n. (il s'agit de la même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).

⚠ une suite n'est pas dérivable : la théorie de la dérivation ne s'applique qu'à des fonctions définies sur des intervalles.

Exemples de suites explicites

• Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - n$.

$u_0 =$ $u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

$u_n + 1 =$ ....

$u_{n+1} =$ ....

• Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$.

$v_{2n} =$ ....

$v_{2n+1} =$ ....

Exemple de suites définies par récurrence

• Soit w_n la suite définie par $w_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = w_n - 2$.

$w_1 =$ $w_2 =$ $w_3 =$ $w_4 =$

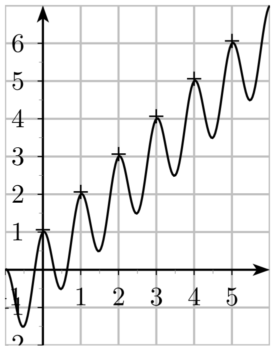
Conjecturer w_n et vérifier la conjecture. $w_n =$ ....

2. Sens de variation d'une suite

Une suite (u_n) est strictement croissante à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
Une suite (u_n) est strictement décroissante à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
Une suite (u_n) est constante à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout entier naturel $n > n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Propriété. Soit (u_n) une suite. On a :
- ⋆ (u_n) est strictement croissante équivaut à $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n.
- ⋆ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ alors (u_n) est strictement croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout n.
- ⋆ si f est strictement croissante sur $[n_0, +\infty[$ et $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (u_n) est strictement croissante à partir de n_0.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ si et seulement si $u_{n+1} - u_n > 0$.
Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
Si $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f strictement croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $f(n+1) > f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ pour tout $n > n_0$.



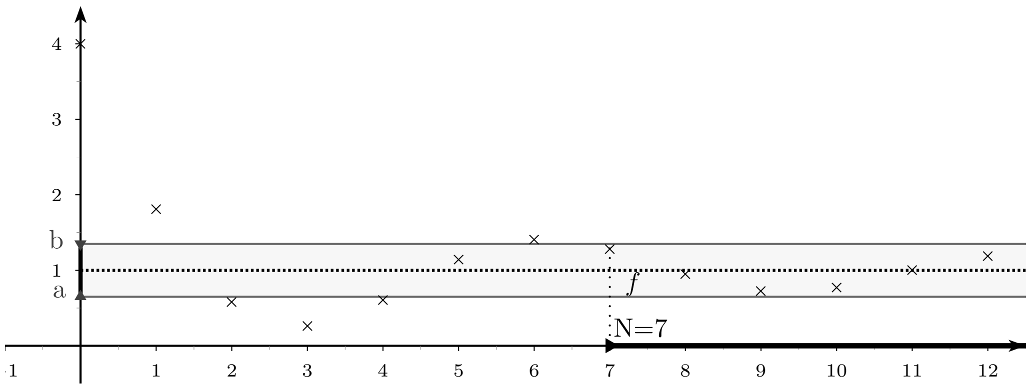
Exemple. Le dernier critère n'admet pas de réciproque : il se peut que $u_n = f(n)$ où f n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$. Par exemple, Soit (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $a_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \cos(2\pi x)$. La courbe de f est représentée ci-contre. Que dire de f ? ....
Simplifier et en déduire le sens de variation de (a_n) :
$a_n =$ ....

Remarque. Des critère analogues existent pour montrer qu'une suite est strictement décroissante ! (par exemple, (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n)

Exemple. Sens de variation de (w_n) définie par $w_{n+1} = w_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = 13$? ....
....
Sens de variation de (b_n) définie par $b_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? ....
....
Sens de variation de (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

3. Suites convergentes

On dit que la suite (u_n) est *convergente* de limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert $]a,b[$ contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. (pour tout $]a,b[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $u_n \in]a,b[$). Une suite est *divergente* si elle ne converge pas. (donc s'il existe $]a,b[$ contenant ℓ, mais tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $]a,b[$ ne contient pas tous les termes de la suite)



Exemple. Montrer que la suite constante (c_n) définie par $c_n = c \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$. ....

....

Montrer que (d_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $d_n = \dfrac{1}{n}$ converge.

....

....

Montrer que (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$ pour tout n n'est pas convergente. . .

....

....

....

Théorème. Soient (u_n) et (v_n) convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'.
- $\star$ la somme $(u_n + v_n)$ est une suite convergente, de limite $\ell + \ell'$.
- $\star$ le produit $(u_n \times v_n)$ est une suite convergente de limite $\ell \times \ell'$.
- $\star$ si $\ell' \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, alors (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ'.

Exemple. Montrer que ces suites convergent et déterminer leurs limites : (y_n) : $y_n = 3 - \dfrac{2}{n}$ et (z_n) : $z_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

4. Suites qui tendent vers l'infini

On dit que la suite (u_n) tend vers plus l'infini lorsque n tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
(pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on ait $u_n > A$).
On dit que la suite (u_n) tend vers moins l'infini lorsque n tend vers plus l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.

Exemple. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. . . . .

. . . .

Somme de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

Produit de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

Quotient de limites

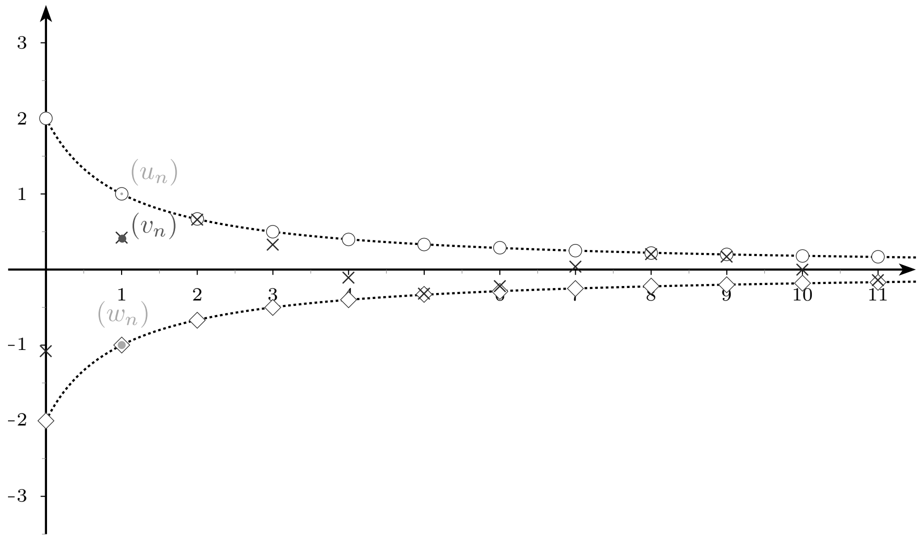
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0, $v_n > 0$ pour tout n	0, $v_n < 0$ pour tout n
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque. Lorsque la situation est indeterminée, il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination.

Exemple. Limites de $(x_n) : x_n = 2 - 3n^2$, $(v_n) : v_n = 2n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Théorèmes d'encadrements

Soit (u_n) et (w_n) deux suites convergentes de limite ℓ. Si la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.



Preuve. Comme (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, pour tout intervalle $]a, b[$ contenant ℓ, tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang N et tous les termes de (w_n) à partir d'un certain rang N' sont dans $]a, b[$. Pour tout $n > \max(N, N')$ on a donc $a < u_n \leq v_n \leq w_n < b$ donc tous les termes de (v_n) sont dans $]a, b[$ à partir de $\max(N, N')$: (v_n) converge vers ℓ.

Exemple. Soit (e_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $e_n = \dfrac{\cos n}{n}$.
Encadrer $\cos n$ et en déduire la limite de (e_n) ....

....

....

Théorème. Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si (v_n) vérifie $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exemple. Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n + \cos(2\pi n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n - 1$. En déduire la limite de (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite *arithmétique* si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q + u_n$.
Le nombre q est la *raison* de la suite et le nombre u_0 son terme initial.
La suite (u_n) est arithmétique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 + n \times q$.

Preuve. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + q \times n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + q \times (n+1) = u_0 + q \times n + q = u_n + q$. Réciproquement, si $u_{n+1} = u_n + q$, on constate par le raisonnement précédent que (v_n) définie par $v_n = u_0 + q \times n$ vérifie $v_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Donner la forme explicite de la suite arithmétique (u_n) de raison -1 et de premier terme 7..

....

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n + 1$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : ....

....

La suite arithmétique (w_n) vérifie $w_9 = 20$ et $w_4 = 5$. Déterminer sa raison et son premier terme..

....

....

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison q.

- Si $q > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et (u_n) est strictement décroissante.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = f(n)$ avec $f(x) = qx + u_0$. Si $q > 0$, la fonction affine f est strictement croissante, si $q < 0$, la fonction f est strictement décroissante. Il en est de même pour la suite (u_n).
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q = q$. Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} qn = +\infty$ si $q > 0$ et $-\infty$ si $q < 0$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 = u_0$. Par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $q > 0$ et $-\infty$ si $q < 0$.

Exemple. Variations et limites

de (u_n) : ....

de (v_n) : ....

de (w_n) : ....

7. Suites géométriques

Une suite (u_n) est dite *géométrique* si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est la *raison* de la suite et le nombre u_0 son terme initial.
La suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 \times q^n$.

Preuve. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q = u_n \times q$. Réciproquement, si $u_{n+1} = q \times u_n$, on constate par le raisonnement précédent que (v_n) définie par $v_n = u_0 \times q^n$ vérifie $v_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Donner la forme explicite de la suite géométrique (u_n) de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 2 ....
....
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : ....
....
La suite arithmétique (w_n) vérifie $w_5 = 96$ et $w_3 = 24$. Déterminer sa raison et son premier terme ....
....
....

Propriété. Soit $q \in \mathbb{R}$.
- Si $1 > q > -1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = q$

Exemple. Limites

de (u_n) : ....

de (w_n) : ....

de (-0.1^n) : ....

8. Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Soit (u_n) une suite arithmétique, alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + ... + u_{p+n} &= \frac{n+1}{2} \times (u_p + u_{p+n}) \\ &= \frac{\text{nb de termes}}{2} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \end{aligned}$$

Preuve. On note $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_{p+n}$, et on calcule $2S$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2S & = & & u_p & + & u_{p+1} & + & ... & u_{p+k} & +... & + & u_{p+n-1} & + & u_{p+n} \\ & & + & u_{p+n} & + & u_{p+n-1} & + & ... & u_{p+n-k} & +... & + & u_{p+1} & + & u_p \end{array}$$

En groupant les termes par 2, on observe que pour tous $0 \leq k \leq n$,
$u_{p+k} + u_{p+n-k} = u_p + k \times q + u_p + (n-k) \times q = u_p + u_p + n \times q = u_p + u_{p+n}$.
Comme on a $n+1$ termes : $2S = (n+1) \times (u_p + u_{p+n})$ d'où l'égalité annoncée.

Exemple. Calculer $1 + 2 + 3 + ... + n$ ....
....
....

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_{p+n} = u_p \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve. Soit $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_{p+n}$. On calcule $(1-q)S$:

$$\begin{aligned} (1-q)S &= (1-q)(u_p + u_{p+1} + ... + u_{p+n}) \\ &= (1-q)(u_p \times 1 + u_p \times q + ... + u_p \times q^n) \\ &= u_p(1-q)(1 + q + q^2 + ...q^n) \\ &= u_p(1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + ... + q^n - q^{n+1}) \\ &= u_p(1 - q^{n+1}) \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée en divisant les deux membres par $1 - q$.

Exemple. Calculer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 1. Calculer la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.