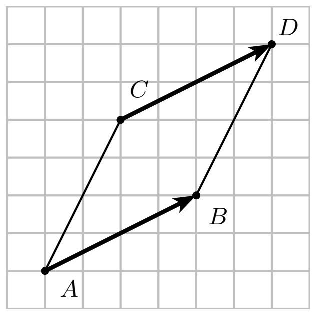
Chapitre 5 : Barycentres -04-01-11-
Première S 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Notion de vecteur

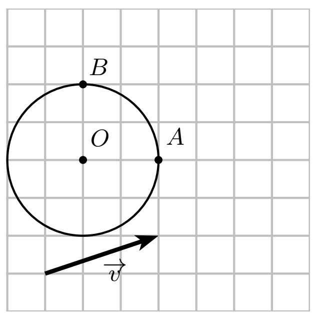
Définition. Deux points distincts A,B du plan définissent un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont les caractéristiques sont :
• sa *direction* donnée par l'ensemble des droites parallèles à (AB).
• son *sens* (de A vers B) donné par la demi-droite $[AB)$
• sa *longueur* : la distance AB appelée norme de AB et notée $||\overrightarrow{AB}||$.
Deux points identiques définissent le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$.
Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Propriété. Si A, B, C, D sont des points non alignés du plan,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \ ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$



Preuve. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors (AB) et (CD) sont parallèles (même direction) : $ABDC$ est un trapèze. $ABDC$ est non croisé car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens et enfin $ABDC$ parallèlogramme car $AB = DC$.
Réciproquement, si c'est un parallélogramme, (AB) et (CD) sont parallèles, $ABDC$ n'est pas croisé et enfin $AB = CD$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

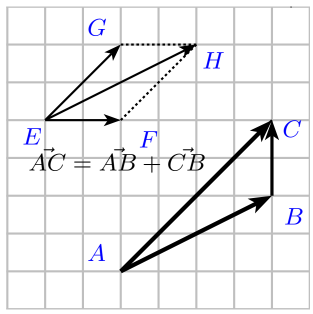
Définition. La *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une transformation géométrique du plan qui au point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
Pour tracer l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on trace un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine M et son extrémité définit le point M'.



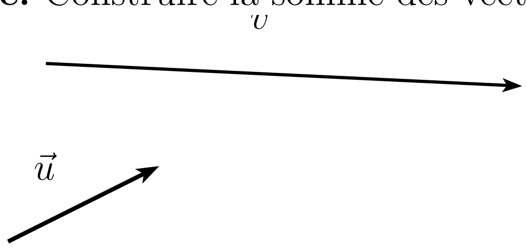
Exemple. Construire ci-contre l'image de O, de A puis du cercle de rayon OA par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Après avoir lu le paragraphe 3 :
Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, donner les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ puis sa norme. ....
....

2. Opérations sur les vecteurs

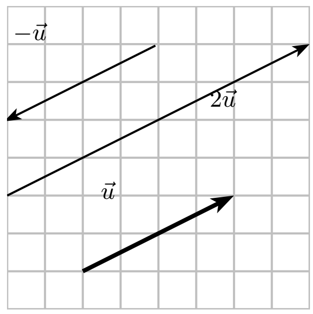
Définition et propriété. Addition de vecteurs
- Pour construire la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de deux vecteurs, on choisit A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Soit D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- Relation de Chasles : ainsi, pour tout A, B, C on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Exemple. Construire la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Définition et propriété. Multiplication par un réel k
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$. Le vecteur $k\,\overrightarrow{u}$ est de même direction que $\overrightarrow{u}$, sa norme est $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$ et il est de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$ (et nul si $k = 0$).



Exemple. Sur la figure de l'exemple précédent, représenter $\dfrac{1}{2}\vec{v}$ et $-\vec{u}$.

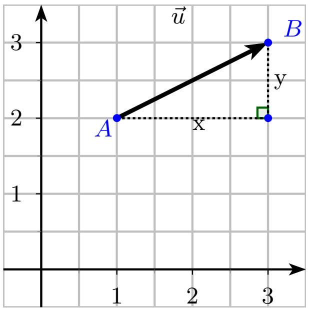
Définition et propriété. Colinéarité, parallélisme, alignement.
- Deux vecteurs sont *colinéaires* si et seulement s'ils ont même direction.
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
- le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple. Dans un triangle ABC, soient I, J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Quel théorème reconnaît-on ? . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. Calculs dans un repère orthonormé

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé. On le note $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Définition et propriété.
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur du plan. Ses coordonnées et sa norme sont données par :
• $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
• $||\overrightarrow{u}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



Propriété. On a :
• Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{u}'(x'; y')$. On a alors $\vec{u} + \vec{u}'(x + x', y + y')$
• Soient $\vec{u}(x; y)$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors on a : $k\vec{u}(kx; ky)$.
• $\vec{u}(x, y) \neq \vec{0}$ et $\vec{u}'(x', y')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = kx'$, $y = ky'$.

Propriété. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant $xy' - x'y$ est nul.

Preuve. Si $\overrightarrow{v} = 0$, le déterminant est nul, et tout vecteur est colinéaire au vecteur nul. On suppose maintenant $\overrightarrow{v} \neq 0$
Lorsque ni x' ni y' ne sont nulles, l'égalité équivaut à $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = k$ donc $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
Si $x' = 0$ l'égalité équivaut à $xy' = 0$ donc $x = 0$ (sinon $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$). Cela signifie que les deux vecteurs ont des directions parallèles à l'axe des ordonnées donc sont colinéaires.
Si $y' = 0$ on montre de même que les deux vecteurs ont des directions parallèles à l'axe des abscisses si et seulement si le déterminant est nul. $\square$.

Exemple. Soient $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$ et $C(1; 1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montrer que ces vecteurs sont colinéaires. Qu'en déduit-on pour les points A, B et C ?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. Barycentre de deux points

Propriété et définition. Soient A,B deux points du plan et a, b deux réels tels que $a + b \neq 0$. Il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. Ce point G est appelé le *barycentre* du système de points pondérés $\{(A, a), (B, b)\}$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow b\overrightarrow{GB} = a\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow b\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{GB} = (a+b)\overrightarrow{AG} \\ &\Leftrightarrow b\overrightarrow{AB} = (a+b)\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ car } a+b \neq 0 \\ &\Leftrightarrow G \text{ est l'image de } A \text{ par la translation de vecteur } \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

A a bien une unique image par la translation d'un tel vecteur. □

Remarque. Lorsque $a = b$, G est l'*isobarycentre* de A et B.

⚠ Si $a + b = 0$, on ne peut pas définir le barycentre.

La démonstration précédente montre que $G \in (AB)$. En outre, en faisant varier $b \in \mathbb{R}$ et en choisissant $a = 1 - b$, on constate que l'ensemble des barycentres de AB est la droite (AB).

Exemple. Représenter le barycentre G de $\{(A, 3), (B, 3)\}$, le barycentre G' de $\{(A, 6), (B, -3)\}$, G'' de $\{(A, 4), (B, 8)\}$.

Propriété. Soit G le barycentre de $\{(A, a), (B, b)\}$. $(a + b \neq 0)$. Alors :
- homogénéité : G est le barycentre de $\{(A, ka), (B, kb)\}$ pour tout réel $k \neq 0$.
- réduction : tout point M du plan vérifie $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

Preuve. Homogénéité :
G le barycentre de $\{(A, a), (B, b)\}$ ssi $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ ssi $ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ ssi G le barycentre de $\{(A, ka), (B, kb)\}$.
Réduction : pour tout point M du plan :
$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ car $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Remarque. La relation de réduction permet, en introduisant le barycentre, de simplifier certaines sommes de deux vecteurs en un seul vecteur.

Exemple. Soient A, B deux points du plan tels que $AB = 6$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $||4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|| = 12$? ....

....

....

....

5. Barycentre de trois points ou plus

Propriété et définition. Soient A,B et C trois points du plan et a, b, c deux réels tels que $a+b+c \neq 0$. Il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Ce point G est appelé le *barycentre* du système de points pondérés $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{GA}=-b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} \text{ car } a+b+c\neq 0\end{aligned}$$

Donc G est l'image de A par la translation de vecteur $\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

Remarque. De manière plus générale, le barycentre de $(A_1,a_1),...,(A_n,a_n)$ avec $a_1+...+a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\neq 0$ est l'unique point G tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\overrightarrow{GA_k}=\overrightarrow{0}$

Propriété. Si G est le barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$. $(a+b+c\neq 0)$,
- homogénéité : G est le barycentre de $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$ pour $k\neq 0$.
- réduction : pour tout point M, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$
- associativité : Si $a+b\neq 0$ notons H le barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$. Alors G est le barycentre de $\{(H,a+b),(C,c)\}$.

Preuve. Les propriétés d'homogénéité et de réduction se prouvent de façon analogue au cas de deux points.
La propriété de réduction entraine $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=(a+b)\overrightarrow{GH}$. Donc :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(a+b)\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GA}.$$

Exemple. Soit G l'isobarycentre d'un triangle ABC. En utilisant l'associativité, montrer que G se situe au 2/3 de chacune des médianes de ABC en partant du sommet. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. Barycentre dans un repère

> Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé et $G(x_G,y_G)$ le barycentre des points $A_1(x_1,y_1)$,...,$A_n(x_n,y_n)$ respectivement affectés des poids a_1,...,$a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_1+...+a_n \neq 0$. Alors :
>
> $$x_G = \frac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}{a_1+...+a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_kx_k}{\sum_{k=1}^n a_k}, \qquad y_G = \frac{\sum_{k=1}^n a_ky_k}{\sum_{k=1}^n a_k}$$
>
> Chacune des coordonnées du barycentre s'obtient en faisant la moyenne des coordonnées correspondante des A_1,...,A_n, affectés des coefficients a_1,...,a_n.

Preuve. On le prouve pour trois points. Soit $G(x_G,y_G)$ le barycentre de $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ affectés des masses a,b,c avec $a+b+c\neq 0$. Alors :

$$\overrightarrow{GA} = \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \end{pmatrix}$$

Or par définition $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. L'abscisse du membre de droite est

$$a(x_A-x_G)+b(x_B-x_G)+c(x_C-x_G) = ax_A+bx_B+cx_C-(a+b+c)x_G = 0$$

ce qui équivaut à $x_G = \dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$. On procède de même pour obtenir la formule de l'ordonnée. On peut généraliser cette démonstration pour n points.

Exemple. $A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$, $C(-1,\sqrt{3})$, $D(-2,0)$, $E(1,-\sqrt{3})$, $F(-1,-\sqrt{3})$. Soit G l'isobarycentre de l'hexagone $ABCDEF$. Quelles sont ses coordonnées ?

....

....

7. Barycentre et transformations

> Si la transformations τ du plan, qui à M associe M' est :
>
> $\star$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: M' tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MM'}$,
>
> $\star$ la rotation de centre A et d'angle $\alpha\in\mathbb{R}$: M' tq. $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) = \alpha \mod 2\pi$,
>
> $\star$ l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda\in\mathbb{R}$: M' vérifie $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$,
>
> alors l'image $\tau(G)$ du barycentre G de (A_1,a_1), ..., (A_n,a_n) est le barycentre de $(\tau(A_1),a_1)$, ..., $(\tau(A_n),a_n)$.

Exemple. Soient A_0 et B deux points distincts. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$. Soient $A_{i+1} = r(A_i)$ pour $i = 0,1,2,3,4,5,6$. Que vaut A_6 ? En déduire que $\{A_i : i = 0,1..,5\}$ est stable par r, puis l'isobarycentre de cet ensemble de points...