Chapitre 4 : Dérivation -23-11-10-
Première S 1, 2010-2011, Y. Angeli

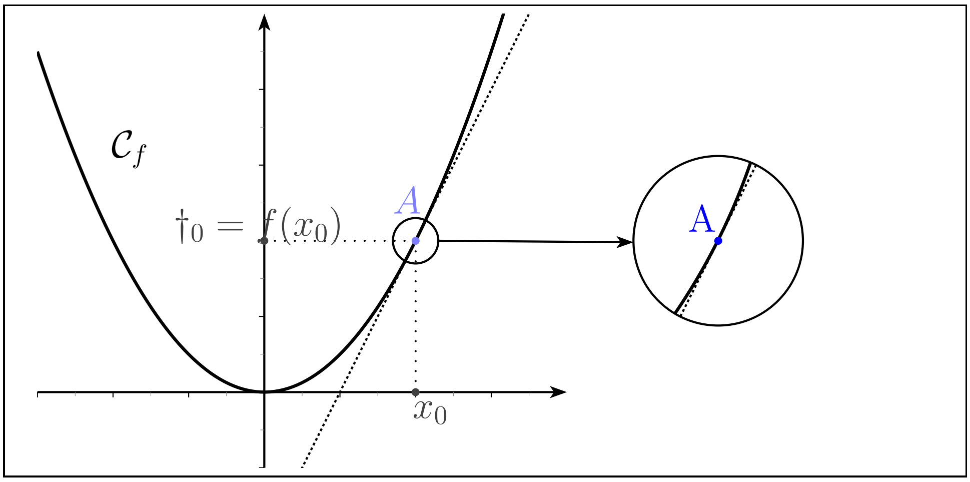
1. Introduction

La notion de dérivée est apparue aux XVIIe siècle, notamment dans les travaux de Newton. Une de ses applications essentielles pour nous sera la recherche du sens de variation d'une fonction.

On connait bien le sens de variation d'une fonction affine : si son coefficient directeur est strictement positif, elle est strictement croissante, s'il est strictement négatif, elle est strictement décroissante.

Si on considère une fonction f plus compliquée, la droite affine tangente à la courbe de f au point $M(x_0, f(x_0))$ réalise une approximation de la courbe. On note $f'(x_0)$ le coefficient directeur de cette tangente. Ainsi, il est intuitif de dire qu'au voisinage de x_0, la fonction f sera strictement croissante si $f'(x_0) > 0$ et strictement décroissante si $f'(x_0) < 0$.

Si l'on est capable de calculer simplement l'ensemble des coefficients $f'(x)$ directeurs des tangentes à la courbe en tout point, une étude du signe de $f'(x)$ nous indiquera sur quels intervalles f croît ou décroît.



L'enjeu de ce chapitre va être de développer les outils qui permettront d'obtenir facilement la fonction dérivée f', telle que pour tout x, $f'(x)$ soit le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $M(x, f(x))$.

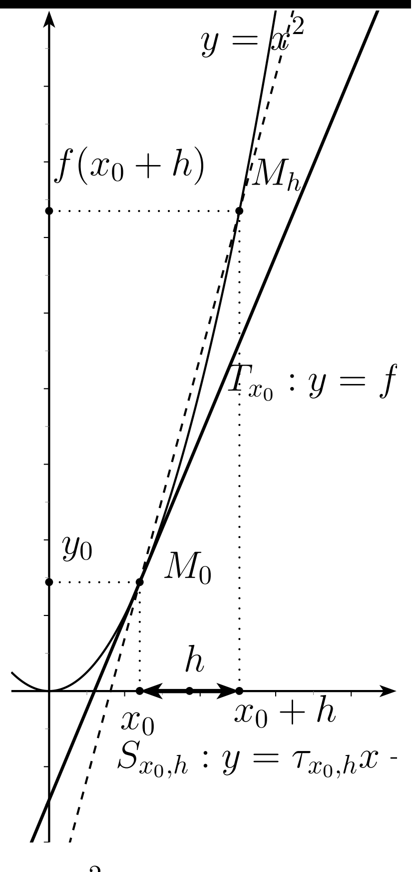
2. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Le *taux d'accroissement* $\tau_{x_0,h}$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est

$$\tau_{x_0,h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Si la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ existe, la fonction f est dite *dérivable* en x_0. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivée* $f'(x_0)$ de f en $x_0 \in I$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$



Remarque. Interprétation géométrique.
Le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ est le coefficient directeur de la sécante $S_{x_0,h} = (M_0M_h)$ où $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Lorsque h tend vers 0 cette sécante devient tangente à la courbe, et c'est naturellement que l'on définit la tangente à la courbe de f au point M_0 comme la droite qui passe par M_0 de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Remarque. Interprétation cinétique.
Si la courbe représente la distance parcourue d'un mobile en fonction du temps, $\tau_{t_0,h} = \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ représente la vitesse moyenne du mobile entre le temps t_0 et t_0+h. Le nombre dérivé $f'(t_0)$ est la limite de cette vitesse lorsque h tend vers 0. c'est la vitesse instantanée du mobile en t_0.

Exemple. Détermination de $f'(x_0)$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
$\tau_{x_0,h} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \dfrac{h(x_0+h+x_0)}{h} = 2x_0 + h.$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \tau_{x_0,h} = 2x_0.$

Exemple. Détermination de $g'(x_0)$ pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$.
....
....
....

3. Tangente à une courbe

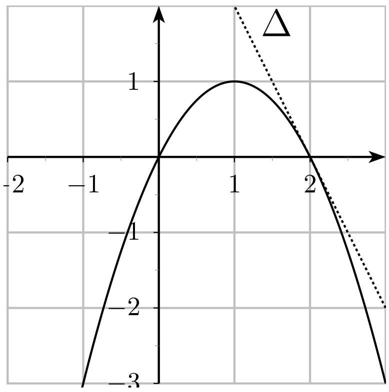
Définition. (Rappel.) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où $x \in I$. Ainsi : $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* T_{x_0} à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(x_0, f(x_0))$ est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$ qui passe par $M_0(x_0, f(x_0))$. (C'est la position limite lorsque h tend vers 0 des sécantes à $\mathcal{C}_f$ en M_0 et $M_h(x_0+h, f(x_0+h))$). Son équation est

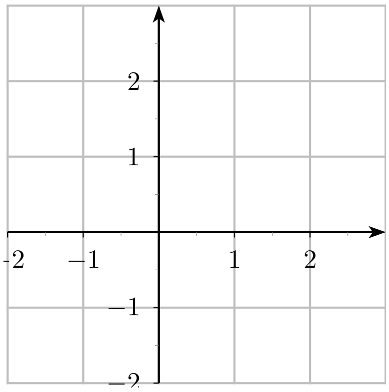
$$T_{x_0} : y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

⚠ La tangente est une droite, c'est une notion graphique. On parle de la tangente en un point d'*une courbe* $\mathcal{C}_f$, et pas de la tangente à une fonction f.

Exemple. La courbe ci-contre représente une fonction f, la droite Δ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déterminer graphiquement $f(2)$ puis $f'(2)$. Même chose pour $f(1)$ puis $f'(1)$ ....
....
....
....
....



Exemple. Si une courbe représentative d'une fonction n'admet pas de tangente au point d'abscisse x_0, cela implique que la fonction n'est pas dérivable en x_0. Donner une exemple de fonction f et d'abscisse x_0 telle que f n'est pas dérivable en x_0. Représenter la courbe associée. ....
....
....
....



Exemple. On a calculé l'expression du nombre dérivée de la fonction carré en tout x_0. En déduire l'équation réduite de la tangente à la parabole de la fonction carré au point d'abscisse -3, et de la tangente au point d'abcisse 0. .
....
....
....
....

4. Fonction dérivée, dérivée des fonctions de référence

La *fonction dérivée* f' d'une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I est la fonction qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivée $f'(x)$. (c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x). On a :

$\star$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a$.
$\star$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$.
$\star$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto nx^{n-1}$. ($n \in \mathbb{N}$).
$\star$ $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
$\star$ $[0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $]0;+\infty[, x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\star$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\sin x$.
$\star$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$.

Preuve. Les deux premiers points sont démontrés dans la feuille d'exercice 4 et le premier exemple du cours. Le quatrième point a été démontré en exercice. Les deux derniers seront prouvés ultérieurement.

• Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Alors

$$\tau_{x_0,h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \times \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

....

Donc pour $x > 0$, $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \tau_{x_0,h} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

⚠ Pour $x_0 = 0$ le taux d'accroissement devient arbitrairement grand lorsque h tend vers 0. On note $\lim\limits_{h\to 0} \tau_{0,h} = +\infty$. La courbe admet une tangente verticale à l'origine, mais la fonction n'est pas dérivable en 0.

• Soit g la fonction définie par $g(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $(x_0+h)^n$ est un produit de n facteurs. Si l'on développe ce produit en groupant les termes suivant les puissances décroissantes de x_0, on a :
$(x_0+h) \times (x_0+h) \times ... \times (x_0+h) = x_0^n + nhx_0^{n-1} + h^2\varepsilon(h,x_0)$ où ε est une fonction polynomiale en x_0 et h.
Ainsi $\tau_{x_0,h} = \dfrac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \dfrac{nhx_0^{n-1} + h^2\varepsilon(h,x_0) - x_0^2}{h} = nx_0^{n-1} + h\varepsilon(h,x_0)$.
D'où $g'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} nx_0^{n-1} + h\varepsilon(h,x_0) = nx_0^{n-1}$ $\square$.

Exemple. Donner une expression de la fonction dérivée de la fonction cube.

....

....

5. Opérations sur les dérivées.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors

$\star$ $u+v$ est dérivable sur I de dérivée $(u+v)'=u'+v'$.

$\star$ uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)'=u'v+v'u$.

$\star$ ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)'=ku'$. (ou $k\in\mathbb{R}$)

$\star$ $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x)=0$, de dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$.

$\star$ $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x)=0$, de dérivée $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

$\star$ $x\mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle des x tels que $ax+b\in I$ de dérivée $x\mapsto a\times u'(ax+b)$.

⚠ Les dérivées de uv, $\dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{1}{v}$ n'ont pas des formules simples !

Preuve. Pour tout $x\in I$, on considère le taux d'accroissement de $u+v$ en x :

$$\begin{aligned}\tau_{x,h} &= \frac{(u(x+h)+v(x+h))-(u(x)+v(x))}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ (u+v)'(x) &= \lim_{h\to 0}\tau_{x,h}=u'(x)+v'(x)\end{aligned}$$

car, u étant dérivable, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et de même pour v.
Pour tout $x\in I$, on considère le taux d'accroissement de uv en x :

$$\begin{aligned}\tau_{x,h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-v(x)u(x)}{h}\\ &= u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\\ (uv)'(x) &= \lim_{h\to 0}\tau_{x,h}=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)\end{aligned}$$

donc la limite du taux d'accroissement est bien $u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$.
Dans le cas où $v=k$ est constante : $(ku)'=k'u+ku'=0+ku'=ku'$.

Pour tout $x \in I$, on considère le taux d'accroissement de $\dfrac{1}{v}$ en x :

$$\begin{aligned}
\tau_{x,h} &= \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{v(x)}{v(x)v(x+h)} - \frac{v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} \\
&= \frac{v(x) - v(x+h)}{hv(x)v(x+h)} \\
&= -\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} \\
\left(\frac{1}{v}\right)'(x) &= \lim_{h \to 0} \tau_{x,h} = -v'(x) \times \frac{1}{v(x)^2} = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(u \times \dfrac{1}{v}\right)' = u'\dfrac{1}{v} - \dfrac{v'}{v^2}u = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Pour x tel que $X = ax + b \in I$, le taux d'accroissement de $x \mapsto u(ax+b)$ est

$$\begin{aligned}
\tau_{x,h} &= \frac{u(a(x+h)+b) - u(ax+b)}{h} \\
&= \frac{u(a(x+h)+b) - u(ax+b)}{h} \times \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{a(x+h)+b-(ax+b)} \\
&= \frac{u(X+ah) - u(X)}{ah} \times \frac{ah}{h} \qquad \text{où } X = ax+b \\
(u(ax+b))' &= \lim_{h \to 0} \tau_{x,h} = u(X) \times a = a \times u(ax+b) \qquad \square
\end{aligned}$$

Exemple. Dériver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3 - \dfrac{x}{2} + 3$ ....
....
....
....

Exemple. Dériver $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cos x$ ....
....
....
....

Exemple. Dériver $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ....
....
....
....

Exemple. Dériver $m : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$ ....
....
....
....

6. Applications et exemples

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$.
- Si $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.
- Si $f'(x) < 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.
- Si $f'(x) = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intrevalle $]a,b[$.
Si f admet un extremum local en $c \in I$ (c'est-à-dire un maximum ou un minimum de la fonction au voisinage de c), alors $f'(c) = 0$ et la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en $(c, f(c))$.

⚠ La réciproque est fausse : pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est ni maximum ni minimum local de f.

Exemple. Tableau de variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 6x^2 - 15x + 3$

....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple. Ensemble de définition et tableau de variations de $g : x \mapsto \dfrac{1-x}{2-x}$

....
....
....
....
....
....
....

Exemple. Ensemble de définition et tableau de variations de $h : x \mapsto x\sqrt{x+1}$

....
....
....
....
....
....
....
....

7. Méthodes d'étude du signe d'une dérivée

Pour dresser un tableau de signe de $f'(x)$, on utilise une forme **factorisée** $f'(x)$. On étudie sur des lignes séparées le signe de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur. On n'oublie pas les doubles barres pour matérialiser les valeurs interdites.

⚠ La règle des signes n'a de sens que pour les produits ou les quotients. On ne fait pas de tableau de signes pour les sommes ! ! (on ne peut déduire, par exemple, le signe de $x^3 + x^2 + x - 1$ du signe de x^3 et de celui de $x^2 + x - 1$. Il faut trouver un moyen de factoriser cette expression).

⚠ Seul le signe de la dérivée f' renseigne sur les variations de f. Étudier le signe de f n'apporte aucune indication sur ses variations.

• On commence par *factoriser* au maximum la dérivée. Surtout, on ne développe pas dénominateur de la dérivée d'un quotient (qui est un carré, donc positif).

• Si un facteur est un carré (exemple $(x-8)^2$), une racine carrée (exemple $\sqrt{3x-1}$), son signe est toujours positif.

• Si un facteur est une fonction affine du type $ax + b$, son signe est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

• Si un facteur est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$, son signe est donné par :

$\Delta > 0$, Racines : $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta = 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	

• Si un facteur est une fonction $g(x)$ dont on a étudié le signe auparavant, on utilise les résultats précédents pour conclure !