CHAPITRE 3 : TRINÔMES -24-09-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les trinômes du second degré à coefficients réels, à savoir les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2+bx+c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Forme canonique d'un trinôme

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \text{ où } \Delta = b^2-4ac$$

Cette écriture du trinôme ax^2+bx+c est sa *forme canonique*. Le nombre Δ est le *discriminant* du trinôme.

Preuve. On part de ax^2+bx+c et on factorise par a (cela introduit des dénominateurs avec a autorisés par l'hypothèse $a \neq 0$) :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

On cherche ensuite à compléter $x^2+\frac{b}{a}x$ en une identité remarquable du type $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$. On pose naturellement $A = x$. Le terme $\frac{b}{a}x$ est le double produit $2AB$ si l'on pose $B = \frac{b}{2a}$:

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c\times 4a}{a\times 4a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \text{ car } \Delta = b^2-4ac. \qquad \square
\end{aligned}$$

2. Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

$\star$ si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

$\star$ si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

$\star$ si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution.

Preuve. Comme $a \neq 0$, en utilisant la forme canonique de ax^2+bx+c, on obtient : $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$

$\star$ Supposons $\Delta < 0$. Un carré étant positif ou nul, on a $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$. Par conséquent : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. Donc l'équation $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ n'admet pas de solution.

$\star$ Supposons $\Delta = 0$. L'équation devient $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Or $A^2 = 0$ si et seulement si $A = 0$. L'équation équivaut donc à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$: elle admet pour unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

$\star$ Supposons $\Delta > 0$. Alors en utilisant l'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$:

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= (x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}$$

où x_1 et x_2 sont définis comme dans l'énoncé. Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteur est nul, d'où $x = x_1$ ou $x = x_2$. $\square$

Remarque. Cette démonstration donne également des formes factorisés de ax^2+bx+c : si $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ et si $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.

Exemple. Résoudre $x^2 - 3x + 2 = 0$ ....

....

....

3. Signe d'un trinôme

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Les tableaux suivants donnent le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de Δ.

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Preuve.

$\star$ $\Delta < 0$ on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. En multipliant par a on trouve que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est du signe de a.

$\star$ $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_0)^2$. Or $(x - x_0)^2 > 0$ pour $x \neq x_0$ et $(x - x_0)^2 = 0$ pour $x = x_0$. En multipliant par a on trouve $ax^2 + bx + c$ du signe de a sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = x_0$ où $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

$\star$ $\Delta > 0$: on utilise la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$. On suppose que $x_1 < x_2$ sont ses deux racines. Alors :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a	0	signe de a	0	signe de a	
ax^2+bx+c		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

$\square$

Exemple. Résoudre $x^2 - 3x + 2 > 0$. ....

....

....

....

....

Exemple. Dresser le tableau de signes de $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2$. ....

....

....

....

....

4. Variations d'un trinôme

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$. La courbe représentative du trinôme P est appelée une *parabole*.

Les tableaux suivants donnent les variations de P selon le signe de a :

Si $a > 0$:

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & \dfrac{-b}{2a} & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
P & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -\dfrac{\Delta}{4a} & & \\
\hline
\end{array}$$

Si $a < 0$:

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & \dfrac{-b}{2a} & & +\infty \\
\hline
 & & & -\dfrac{\Delta}{4a} & & \\
P & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty \\
\hline
\end{array}$$

Preuve. Pour l'étude des variations, on utilise la forme canonique.

Pour tous $x < x' \leq -\dfrac{b}{2a}$, on a $x + \dfrac{b}{2a} < x' + \dfrac{b}{2a} \leq 0$.

Or la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, donc

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > \left(x' + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > \left(x' + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \geq -\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

$\star$ Si $a > 0$, en multipliant par a on obtient :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > a\left(\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

d'où $P(x) > P(x')$: P est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$.

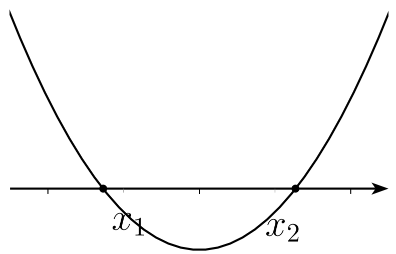
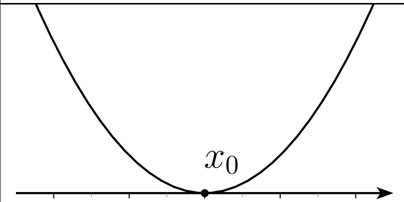
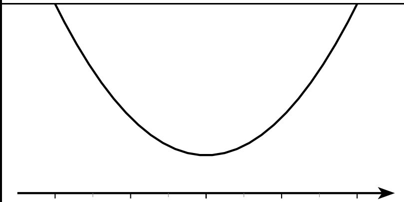
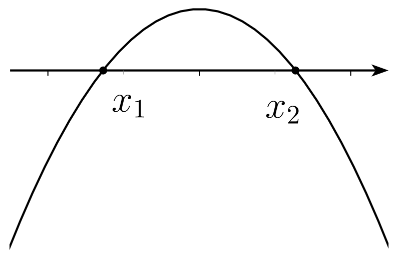
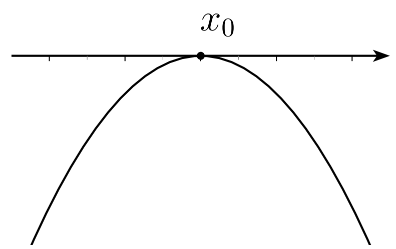
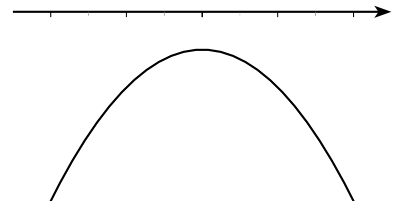
$\star$ Si $a < 0$, en multipliant par a on obtient :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) < a\left(\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

d'où $P(x) < P(x')$: P est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$.

Un raisonnement analogue permet d'étudier l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$. $\square$

Exemple. Dresser le tableau de variations de $x \mapsto -x^2 + 3x + 2$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	Variations
$a > 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline f & +\infty & \searrow & -\frac{\Delta}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array}$
$a < 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline f & -\infty & \nearrow & -\frac{\Delta}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}$
Racines	$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de racine	

5. Théorème d'identification et applications

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. Alors $P(x) = Q(x)$ pour tout x réel si et seulement si P et Q sont de même degré n et les coefficients des monômes x^n,x^{n-1}, ...x^2, x, 1 de P et de Q sont identiques.

Propriété. Si x_1 et x_2 sont deux racines (éventuellement confondues) de $x^2 + bx + c$ alors $b = -(x_1 + x_2)$ et $c = x_1x_2$

Preuve. On est dans la situation où $\Delta > 0$ et $a = 1$, le trinôme se factorise ainsi : $x^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2) = x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2 = x^2-(x_2+x_1)x+x_1x_2$. On obtient le résultat par le théorème d'identification. $\square$

Exemple. Deux nombres ont une somme égale à 10 et un produit égal 24. Quels sont-ils ? ....

....

....

....

....

....

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n telle que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Exemple. Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de P puis résoudre $P(x) = 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....