Chapitre 2 : Angles orientés -24-09-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

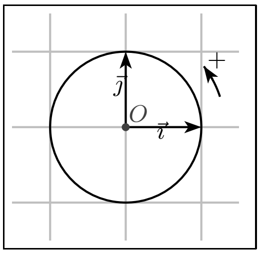
1. Définition d'un angle orienté et de sa mesure.

Définition. Dans le plan munis d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M du cercle de la manière suivante :
• si $x \geq 0$, on parcourt à partir de I une distance x sur le cercle trigonométrique dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif, trigonométrique)
• si $x < 0$, on parcourt à partir de I une distance de $-x$ sur le cercle trigonométrique dans le sens des aiguilles d'une montre (sens négatif, inverse du sens trigo)

Exemple. Placer sur le cercle les points associés aux réels suivants :

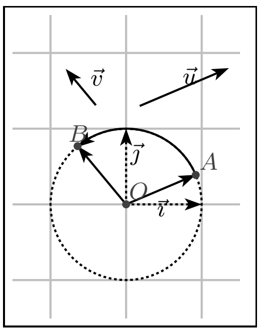
$$\frac{\pi}{2},\ 0,\ 2\pi,\ \pi,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{6}$$

Quel est l'ensemble des réels dont le point associé est le même que celui qu'on associe à $\frac{\pi}{4}$?...............................



Un angle orienté est la donnée d'un couple de vecteurs non nuls $(\vec{u},\vec{v})$. (l'ordre est important). On considère le point A image de O par la translation de vecteur unitaire $\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}$ et le point B image de O par la translation de vecteur $\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$.
Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{AOB}$ (celui des deux arcs définis par A et B qui est parcouru dans le sens trigonomérique).
L'ensemble des mesures de $(\vec{u},\vec{v})$ est $\{\ell + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On confond la notation de l'angle et de l'une de ses mesures : $(\vec{u},\vec{v}) = \ell \mod 2\pi = \ell + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Parmi les mesures d'un angle, on appelle mesure principale celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple. $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) =$.......................................
$(\vec{\jmath},\vec{\imath}) =$..



⚠ L'unité d'une mesure d'angle orienté est le radian. Ne pas oublier de régler le mode de la calculatrice.

Remarque. Les degrés et les radians sont proportionnels : 180° correspondent à π rad.

2. Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \mod 2\pi$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \mod 2\pi$.
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $\pi \mod 2\pi$ ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \mod \pi$.
4. Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \mod 2\pi$.
5. $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \mod 2\pi$.
6. $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \mod 2\pi$.
7. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \mod 2\pi$.
8. $(\lambda\vec{u}, \lambda'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \mod 2\pi$, si $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} - \{0\}$ sont de même signe.
9. $(\lambda\vec{u}, \lambda'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \mod 2\pi$, si $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} - \{0\}$ sont de signes contraires

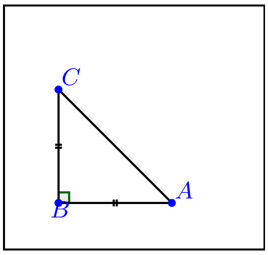
Preuve. 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ssi les vecteurs unitaires qui leurs sont associés sont égaux (colinéaires, de même sens, et de même norme 1) ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \mod 2\pi$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires ssi les vecteurs unitaires qui leurs sont associés sont opposés (colinéaires, de sens contraires, et de même norme 1) ssi $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \mod 2\pi$.
3. La première équivalence reprend les deux précédentes. On note que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $\pi \mod 2\pi$ signifie $(\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi$ ou $(1 + 2k)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, donc simplement $(\vec{u}, \vec{v}) = k\pi = 0 \mod \pi$.
4. admise. voir TP 1 pour une approche intuitive.
5. $(\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{v}) = 0 \mod 2\pi$. Donc $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \mod 2\pi$.
6-9 exercices (utiliser la relation de Chasles, comme dans le 5. □

⚠ Pour déterminer la mesure d'un angle orienté à partir d'un angle géométrique, il faut faire attention au signe !

Théorème. Soient A, B et C trois points non alignés. Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi \mod 2\pi$$

Exemple. Mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? ....
....
....
....



3. Cosinus et sinus d'un angle orienté

À un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ on associe le point M du cercle trigonométrique correspondant à n'importe laquelle de ses mesures. Le *cosinus* de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, noté $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ est l'abscsisse de M, et le *sinus* de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, noté $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ordonnée de M.

Exemple. Démontrer que $\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin \dfrac{\pi}{4}$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Démontrer que $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. . . . .

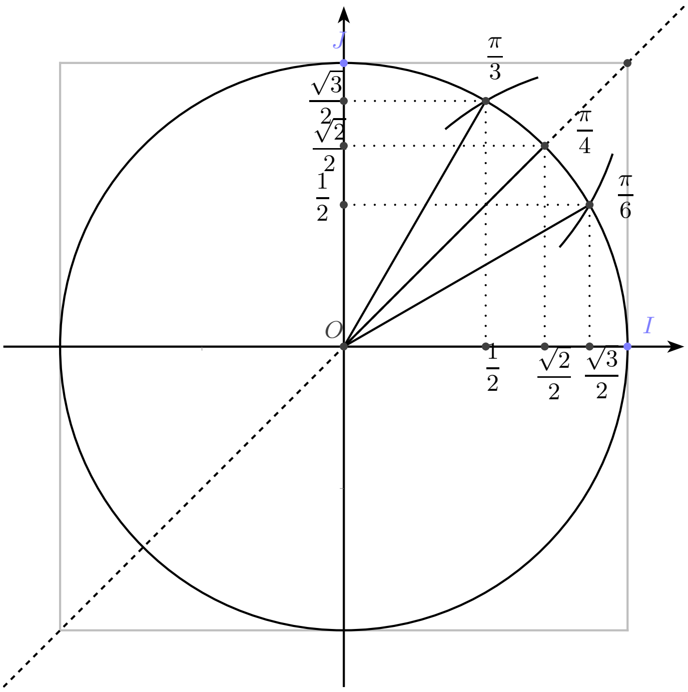
. . . .

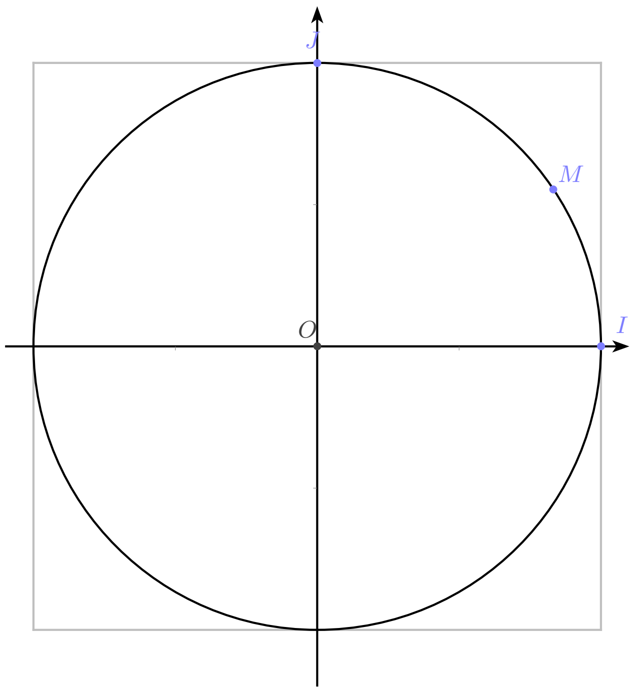
. . . .

. . . .

Propriété. Valeurs des cosinus et sinus des angles remarquables.

x deg.	0		45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	330	360
x rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$																
$\sin x$																





Exemple. Le point M est associé à un réel x quelconque. Quelles sont ses coordonnées ? Placer les points correspondants à $\dfrac{\pi}{2} - x$, $\pi - x$, $-x$, $\pi + x$ et 2π et en déduire les cos et sin de ces angles en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

4. Exemple : équation trigonométrique

⚠ Il existe une infinité de réels qui ont la même image par cos et sin. Ne pas oublier de solutions lors de la résolution d'équations trigonométriques !

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

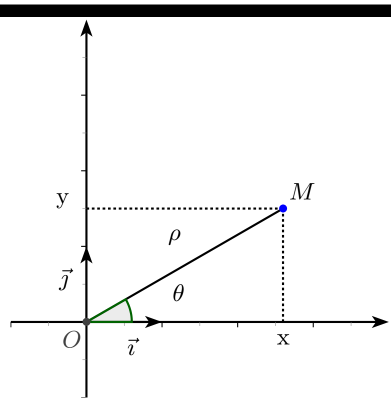
5. Coordonnées polaires

Définition. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit M un point quelconque. Si $M \neq 0$, on appelle coordonnées polaires du point M un couple $[\rho, \theta]$ où $\rho = OM$ et $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \mod 2\pi$. Si $M = O$, $\rho = 0$ et on admet que θ peut prendre n'importe quelle valeur.

Propriété. Soit $M(x; y) \neq O$ Alors ses coordonnées polaire $[\rho, \theta]$ satisfont :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Soit $M[\rho, \theta]$. Alors ses coordonnées cartésiennes (x, y) satisfont : $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$



Exemple. Placer le point M' de coordoonnées $\left[\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Donner les coordoonnées cartésiennes de M'. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple. Donner les coordonnées polaires du point $M(-3; 3)$. . . . .

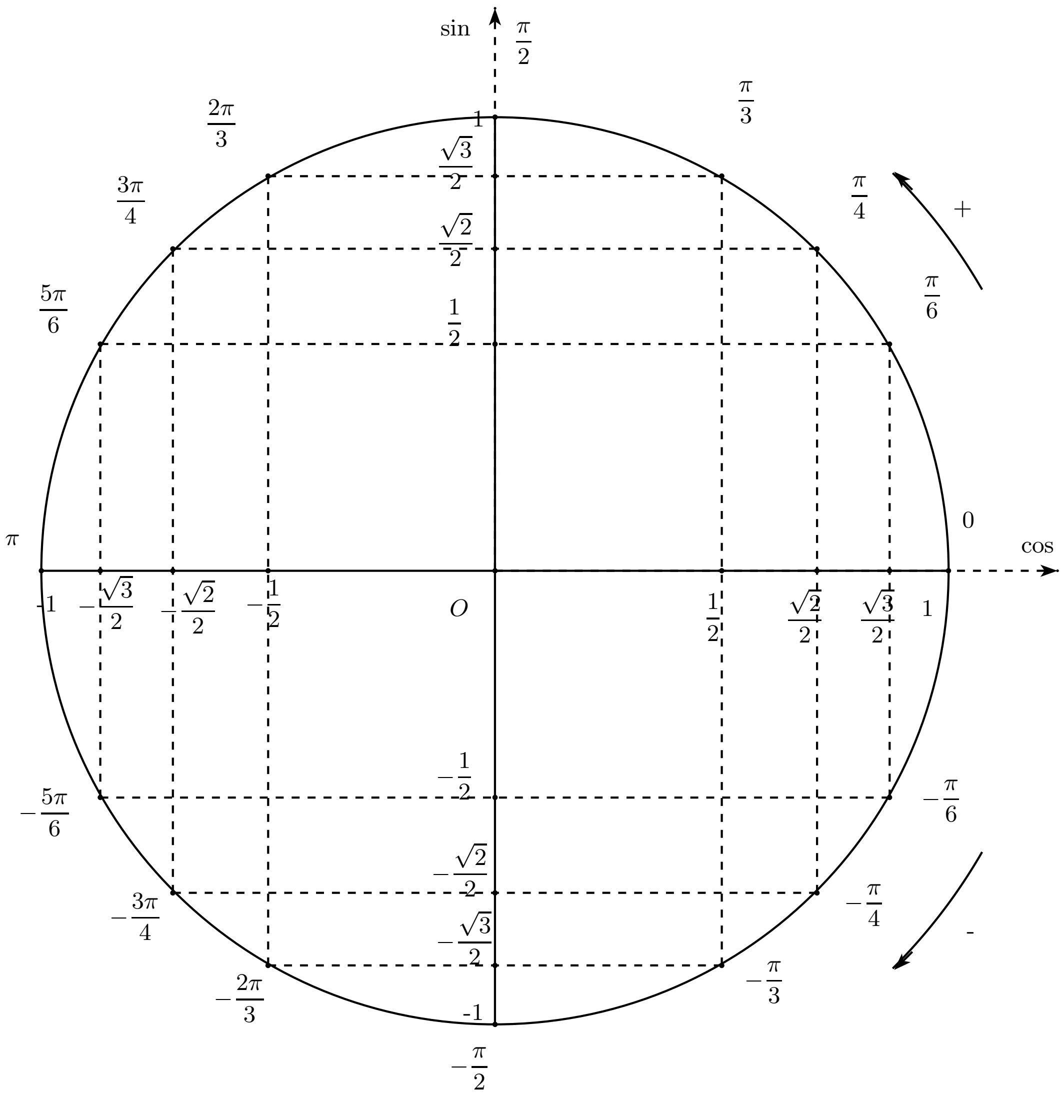
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. Formulaire



Les formules suivantes sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$ (sauf $\frac{\pi}{2} \mod \pi$ pour la dernière colonne et $0 \mod \frac{\pi}{2}$ pour la dernière égalité),

$$
\begin{array}{lll}
\cos^2 x + \sin^2 x = 1 & & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\
\cos(x+2\pi) = \cos x & \sin(x+2\pi) = \sin x & \tan(x+2\pi) = \tan x \\
\cos(x+\pi) = -\cos x & \sin(x+\pi) = -\sin x & \tan(x+\pi) = \tan x \\
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x & \tan(-x) = -\tan x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) & \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x) & \tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}
\end{array}
$$

$O = [0,\theta] = (0,0)$ pour tout θ. Si $M \neq O$:

$$
M[\rho,\theta] = M(x,y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right.
$$