Chapitre 1 : Valeur absolue -10-09-10-
Première S1, 2010-2011, Y. Angeli

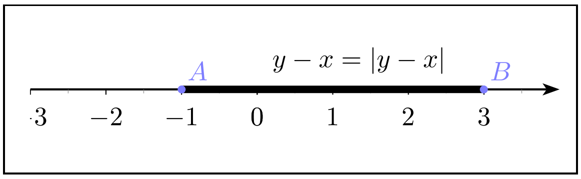
1. Définition et applications

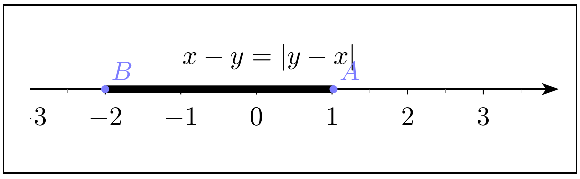
La *valeur absolue* d'un nombre réel x est le nombre réel noté $|x|$ et défini par
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple. $|3,2| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $|-10| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $|0| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Distance entre deux nombres

Soient A et B deux points d'abscisses respectives x et y sur une droite graduée. La *distance $d(x,y)$ entre les nombres* x et y, est définie comme la distance AB. Ainsi, des deux nombres $x-y$ et $y-x$, $d(x,y)$ est celui qui est positif. On a donc $d(x,y) = |y-x|$ et en particulier $|x| = |x-0| = d(x,0)$ s'intérprète comme la distance du nombre x à 0.





Exemple. Interpréter $|x+1| = 3$ en terme de distances et en déduire les solutions de cette équation. . . . .
. . . .

Valeur approchée

Soit x un nombre réel et ε un réel positif. On dit que le réel a est une valeur approchée de x à ε près si et seulement si $|x-a| < \varepsilon$. (et on dit que a est une valeur approchée de x à ε près par excès ssi $x \leq a \leq x+\varepsilon$, ou encore que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut ssi $x-\varepsilon \leq a \leq x$.

Exemple. Au Vème siècle, le chinois Tsu Chung Chih a obtenu $\dfrac{355}{113}$ comme valeur approchée de π. Montrer qu'il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-6} près.
. . . .

Exemple. En exercice, montrer que a est une valeur approchée de x à ε près si et seulement si $x-\varepsilon \leq a \leq x+\varepsilon$.

2. Propriétés

La valeur absolue possèdre les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. (une valeur absolue est toujours positive)
2. Si $|x| = 0$ alors $x = 0$
3. Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$.
4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \times |y|$ (la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues)
5. La valeur absolue d'un quotient est le quotient des valeurs absolues.
6. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

⚠ Montrer par un contre-exemple que $|x + y|$ n'est pas égal à $|x| + |y|$ en général. ....
....

Preuve. 1. Si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x > 0$ donc pour tout x réel, $|x| \geq 0$.
2. On démontre la *contraposée*, à savoir : si $x \neq 0$, alors $|x| \neq 0$. En effet, si $x > 0$, alors $|x| = x > 0$ donc $|x| \neq 0$. Et si $x < 0$, alors $|x| = -x > 0$ donc $|x| \neq 0$. Ainsi, si $x \neq 0$, alors $|x| \neq 0$. Par conséquent, si $|x| = 0$, alors $x = 0$.
3. Exercice. (considérer quatre cas selon le signe de x et de y.)
4. Si x ou y est nul alors $|xy| = 0 = |x||y|$. Sinon, on distingue quatre cas :

x	y	xy	$\|xy\|$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x\|\|y\|$
$+$	$+$	$+$	xy	x	y	xy
$+$	$-$	$-$	$-xy$	x	$-y$	$-xy$
$-$	$+$	$-$	$-xy$	$-x$	y	$-xy$
$-$	$-$	$+$	xy	$-x$	$-y$	xy

5. Exercice (même méthode).
6. Distinguer 4 cas (en fonction du signe de x et y) et lorsque x et y sont de signe opposé, distinguer deux sous-cas (selon que $x + y \geq 0$ ou $x + y < 0$).

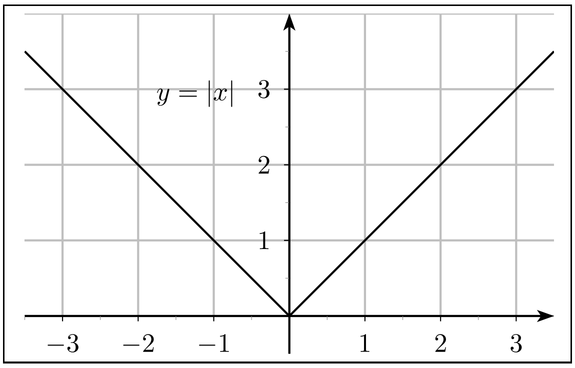
Exemple. À l'aide des propriétés, démontrer que pour tout réel x, $|-x| = |x|$
....
Résoudre $|3x + 4| = |2x + 1|$..
....
....

3. Fonction valeur absolue

Propriété. La fonction valeur absolue

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$$

est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Pour tout x réel, on a $|x| = \sqrt{x^2}$.



Preuve. Pour tous réels x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$, on a $|x_1| < |x_2|$ car $|x| = x$ pour tout x positif.
Ainsi, la fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Pour tous réels x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < 0$, on a $-x_1 > -x_2 > 0$ (on change les inégalités de sens en multipliant par $-1 < 0$), donc on en déduit $|x_1| > |x_2|$ car $|x| = -x$ pour tout x strictement négatif.
Ainsi, la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Pour tout réel x, $|x| = x$ ou $-x$ donc $|x|^2 = x^2$ ou $(-x)^2$ soit finalement $|x|^2 = x^2$. On en déduit $|x| = \sqrt{x^2}$ ou $-\sqrt{x^2}$, mais comme $|x| \geq 0$, on a bien $|x| = \sqrt{x^2}$.

Remarque. Sur les calculatrices, la valeur absolue est généralement notée [*Abs*]. Sur les TI, on y accède par le menu $[Math]->NUM$.

Exemple. Soient x_A et x_B deux réels. Exprimer leur distance en utilisant la dernière formule de la propriété. Rappeler la formule de la distance entre deux points A et B du plan et conjecturer la formule de la distance entre deux points A et B de l'espace. . . . .

. . . .

. . . .

Exemple. Conjecturer l'allure et le tableau de variation de la courbe représentant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -|x+1| + 2$ dans un repère orthonormé. Prouver les résultats du tableau de variation conjecturé.