

---

FEUILLE D'EXERCICE 2 -25.01.10-  
MATRICE DE LEONTIEF, MATRICE DE TRANSITION  
Premières ES-Spécialité - Lycée Newton - Y. Angeli

---

EXERCICE 1 : MATRICE DE LEONTIEF (1906-1999)

Une économie compte trois secteurs de production, produisant des biens notés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  (par exemple la production de charbon, d'acier et d'électricité).

	Biens nécessaires		
	$X$	$Y$	$Z$
Produire une unité de $X$ demande :	0,3	0,5	0,1
Produire une unité de $Y$ demande :	0,4	0,2	0,3
Produire une unité de $Z$ demande :	0,1	0,6	0,1

La demande des consommateurs est de 20 unités de  $X$ , 10 de  $Y$  et 30 de  $Z$ .  
On note  $x$ ,  $y$  et  $z$  les quantités respectives de biens  $X$ ,  $Y$ , et  $Z$  à produire pour satisfaire exactement cette demande.

1. Expliquer pourquoi  $x, y$  et  $z$  vérifient  $(S)$  : 
$$\begin{cases} x = 20 + 0,3x + 0,4y + 0,1z \\ y = 10 + 0,5x + 0,2y + 0,6z \\ z = 30 + 0,1x + 0,3y + 0,1z \end{cases}$$

2. Montrer que  $(S) \Leftrightarrow X = AX + C$  où

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que  $(S) \Leftrightarrow (A - I_3)X = -C$ .

4. À l'aide de la calculatrice, donner  $(A - I_3)^{-1}$ .

5. Déterminer  $x, y$  et  $z$ .

## EXERCICE 2.

Chaque année, 20% de la population d'une ville  $X$  migre vers une ville  $Y$  et 5% de la population de la ville  $Y$  migre vers la ville  $X$ . On suppose que ces migrations sont les seuls facteurs influant sur la population des villes.

1. On note  $x$  et  $y$  les populations respectives de  $X$  et  $Y$  une année donnée et  $x'$ ,  $y'$  les populations respectives l'année suivante. Expliquer pourquoi  $X' = AX$  où

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. Si la population actuelle de  $X$  est 8 500 habitants, celle de  $Y$ , 11 500. Quelles étaient les populations l'année précédente ?
3. Expliquer pourquoi la population au bout de  $n$  années sera de  $A^n X$ .
4. Calculer les populations au bout de trois années.
5. À l'aide de la calculatrice, donner avec des coefficients arrondis au millième les matrices  $A^{10}$ ,  $A^{30}$ ,  $A^{50}$ ,  $A^{100}$ .
6. Quel phénomène observe-t-on ?
7. Quelles seront les populations au bout de 50 ans ?
8. Comment vont-elles évoluer ?
9. Si la population totale des deux villes est de  $x + y = 20\,000$ , quelles seront les populations 50 ans après ? Cela dépend-il de la répartition initiale  $x$  et  $y$  entre les deux villes ?