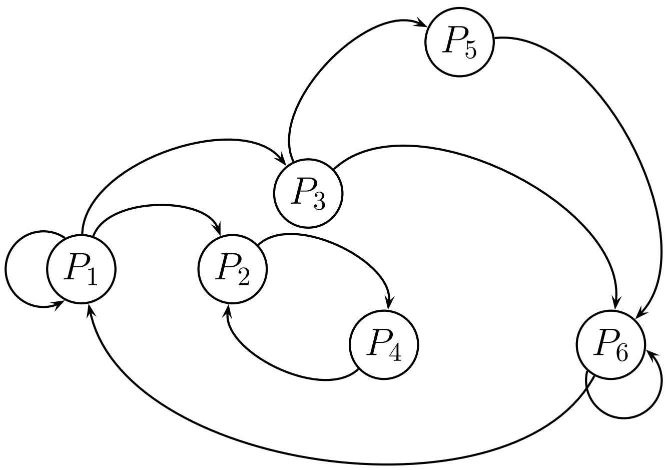
Devoir 4 -15.02.10-

Matrices

Premières ES-Spécialité - Lycée Newton - Y. Angeli

Exercice 1.

Un site internet comporte six pages $P_1, P_2, ..., P_6$. On a représenté ces pages dans le graphe suivant, une flèche entre une page P_i et une page P_j indique l'existence d'un lien sur la page P_i vers la page P_j. $(1 \leq i, j \leq 6)$.



1. Donner la matrice M du graphe. (le coefficient (i, j) de cette matrice vaut 1 s'il existe une flèche du sommet i vers le sommet j, et vaut 0 sinon).
2. Un internaute surfant sur le site arrive à la page P_1. De quelles pages pouvait-il venir ?
3. Combien existe-t-il de façons de passer de la page P_5 à la page P_4 en 8 clics exactement ?
4. Combien de façons existe-t-il de passer de la page P_1 à la page P_1 en 3 clics au maximum ?
5. À l'aide de la calculatrice, calculer M^{10}.
6. Combiens de possibilités permettent d'arriver à la page P_1 en 10 clics ? Même question pour $P_2, ...P_6$. En dix clics, sur quel page un internaute a-t-il le plus de chances de se retrouver ?

Exercice 2.

Soit un pays fictif sans échanges extérieurs, dont l'économie très simplifiée se décompose en deux branches seulement : l'agriculture et l'industrie.

- La production d'un euro de marchandise agricole nécessite :
  - 0,08 euros de biens industriels (engrais chimique, énergie, machines, ...)
  - 0,1 euros de biens agricoles (engrais verts, ...)
- La production d'un euro de marchandise industrielle nécessite :
  - 0,22 euros de biens industriels (énergie, machines, ...)
  - 0,3 euros de biens agricoles (industrie agro-alimentaire, ...)

On suppose que la demande du pays en marchandises agricoles est de 300 milles euros et la demande en marchandises industrielles de 2 500 milles euros.

1. Soit x la quantité optimale, en milliers d'euros, de marchandise agricole à produire. Soit y la quantité optimale, en milliers d'euros, de marchandise industrielle à produire. Montrer que x et y vérifient

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 300 + 0{,}1x + 0{,}3y \\ y & = & 2500 + 0{,}08x + 0{,}22y \end{array} \right.$$

2. Montrer que $(S) \Leftrightarrow (I_2 - A)X = C$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,08 & 0,22 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 300 \\ 2500 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. À l'aide de la calculatrice, donner x et y.

Exercice 3

Un village tropical compte 1000 habitants. Un insecte transmet un virus aux habitants, qui se répartissent en trois catégories (sains, malades, immunisés). Chaque mois :

- 25% des habitants sains sont contaminés et deviennent malades.
- 5% des habitants sains deviennent immunisés.
- 40% des habitants malades guérissent et deviennent immunisés.
- 5% des habitants immunisés perdent leur immunité et deviennent sains.
- le reste de la population ne change pas d'état.

On note x, y, z le nombres d'habitants respectivement sains, malades et immunisés à un moment donné, et x', y', z' le nombres d'habitants respectivements sains, malades et immunisés un mois après.
En janvier 2010, 700 habitants son sains, 250 sont malades et 50 sont immunisés. Soient

$$B = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,05 \\ 0,25 & 0,6 & 0 \\ 0,05 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 700 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi $X' = AX$.
2. En décembre 2010, quelle était la répartition d'habitants sains, malades, immunisés ? Quand la maladie est-elle apparue ?
3. En février 2010, quelle sera la répartition d'habitants sains, malades, immunisés ?
4. Donner B^{12}, B^{24}.
5. Quelle seront les répartitions d'habitants sains, malades, immunisés, en janvier 2011 ? en janvier 2012 ?
6. Soient x, y, z la répartition d'habitants sains, malades, immunisés à un moment donné. Quelle sera la répartition deux ans après ?
7. Comment évoluera cette répartition au delà de deux ans ?