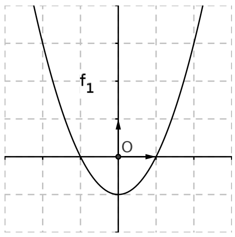
Feuille d'activité II - 03.10.08 -
Équations du second degré.
Première ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

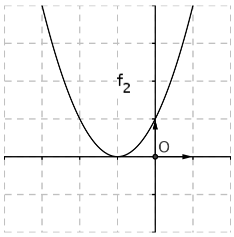
Dans cette activité on s'intéresse aux fonctions

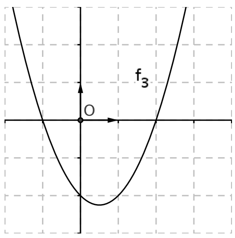
$$f : \mathbb{R} \to R, x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad (\text{ où } a \neq 0).$$

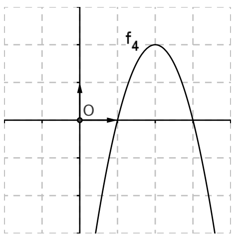
En particulier, on étudie l'équation $f(x) = 0$ et l'orientation de la courbe représentative de f.
Les courbes suivantes représentent les fonctions

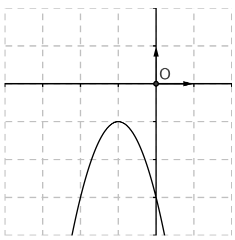
$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^2 - 1 \\
f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^2 + 2x + 1 \\
f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^2 - x - 2 \\
f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto -2x^2 + 8x - 6 \\
f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^2 + 1 \\
f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^2 + 3x + 3
\end{aligned}$$

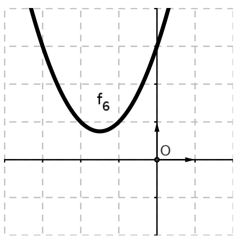












1. Approche graphique

a. Graphiquement, résoudre $f_1(x) = 0$.
b. Graphiquement, résoudre $f_1(x) > 0$.
c. Graphiquement, résoudre $f_1(x) \leq 0$.
d. Répondre à *a.*, *b.*, et *c* pour f_2, à f_6.

2. Résolution de $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$

a. Résoudre $f_1(x) = 0$.
b. Simplifier $f_2(x)$ à l'aide d'une identité remarquable.
c. Résoudre $X^2 = 0$, en déduire les solutions de $f_2(x) = 0$.

3. Forme canonique de $f_3(x)$

a. Trouver α et β tels que

$$(x - \alpha)^2 = x^2 - x + \beta$$

pour tout x réel.
b. Montrer que $f_3(x) = (x - \alpha)^2 - 2 - \beta$.
c. Résoudre $X^2 - \frac{9}{4} = 0$.
d. En déduire les solutions de $f_3(x) = 0$.

4. Forme canonique de $f_4(x)$

a. Trouver α et β tels que

$$(x - \alpha)^2 = x^2 - 4x + \beta$$

pour tout x réel.
b. Montrer que $f_4(x) = -2(x - \alpha)^2 - 6 + \beta$.
c. Résoudre $-2X^2 + 2 = 0$.
d. En déduire les solutions de $f_4(x) = 0$.

5. Résolution de $f_5(x) = 0$ et $f_6(x) = 0$.

a. Résoudre $f_5(x) = 0$.
b. Trouver α et β tels que

$$(x - \alpha)^2 = x^2 + 3x + \beta$$

pour tout x réel.
c. Montrer que $f_6(x) = (x - \alpha)^2 + 3 + \beta$.
d. Résoudre $X^2 + \frac{3}{4} = 0$.
e. En déduire les solutions de $f_6(x) = 0$.

6. Orientation des courbes

a. En observant les six courbes, conjecturer la fin de la règle suivante :
La courbe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est orientée vers le haut si et seulement si ....

7. Discriminant

Le discriminant de l'équation du trinôme $ax^2 + bx + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Calculer les discriminants des six trinômes $f_1, ..., f_6$.
b. En observant les courbes, conjecturer la fin des règles suivantes :
On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$.
si $\Delta > 0$, le nombre de solutions de $f(x) = 0$ est ....
si $\Delta = 0$, le nombre de solutions de $f(x) = 0$ est ....
si $\Delta < 0$, le nombre de solutions de $f(x) = 0$ est ....