DM 14 pour le 09-03-16

Exercice 1. Étude d'une cycloïde et de sa propriété caractéristique Écrits ATS 2014

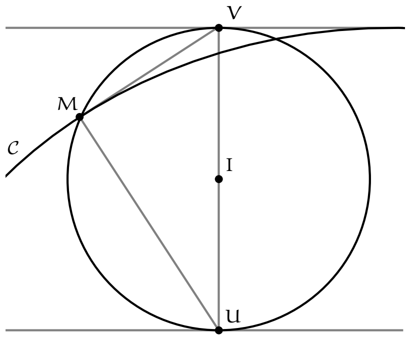
Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin\alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos\alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $M(\alpha)$ le point de paramètre α de $\mathcal{C}$.

① (a) Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.
(b) Donner les coordonnées du milieu du segment $[M(\alpha)M(2\pi-\alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.
(c) Donner les composantes d vecteur $\overrightarrow{M(\alpha)M(2\pi+\alpha)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathcal{C}$ invariante.
(d) Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathcal{C}$.

② (a) Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0;2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
(b) Déterminer un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(0)$ de paramètre 0.
(c) Donner une représentation graphique de $\mathcal{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi;2\pi]$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

③ On suppose maintenant que $\alpha \in]0;\pi[$. On note M le point $M(\alpha)$ de $\mathcal{C}$.



(a) Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente T à $\mathcal{C}$ en M, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale N à $\mathcal{C}$ en M.
(b) Donner une équation de la droite N normale à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point U, intersection de N avec l'axe (Ox).
(c) Donner une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point V, intersection de T avec la droite d'équation $y = 2$.
(d) Que remarque–t–on sur les abscisses des points U et V ?

④ On appelle I le milieu du segment $[UV]$.
(a) Montrer que le cercle de centre I et de rayon 1 contient U, V et M.
(b) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IM}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{IU},\overrightarrow{IM}}$.
(c) Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{UM}$ (situé sous la droite (UM)) et la longueur du segment $[OU]$. (O est l'origine du repère)

DM 14 pour le 09-03-16

Exercice 1. Étude d'une cycloïde et de sa propriété caractéristique Écrits ATS 2014

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin\alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos\alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $M(\alpha)$ le point de paramètre α de $\mathcal{C}$.

① (a) Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Donner les coordonnées du milieu du segment $[M(\alpha)M(2\pi-\alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

(c) Donner les composantes d vecteur $\overrightarrow{M(\alpha)M(2\pi+\alpha)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathcal{C}$ invariante.

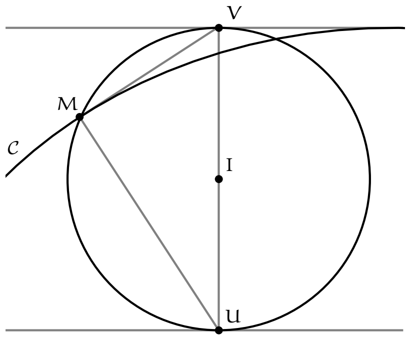
(d) Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathcal{C}$.

② (a) Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0\,;2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)

(b) Déterminer un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(0)$ de paramètre 0.

(c) Donner une représentation graphique de $\mathcal{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi\,;2\pi]$ dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

③ On suppose maintenant que $\alpha \in]0\,;\pi[$. On note M le point $M(\alpha)$ de $\mathcal{C}$.



(a) Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente T à $\mathcal{C}$ en M, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale N à $\mathcal{C}$ en M.

(b) Donner une équation de la droite N normale à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point U, intersection de N avec l'axe (Ox).

(c) Donner une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point V, intersection de T avec la droite d'équation $y = 2$.

(d) Que remarque–t–on sur les abscisses des points U et V ?

④ On appelle I le milieu du segment $[UV]$.

(a) Montrer que le cercle de centre I et de rayon 1 contient U, V et M.

(b) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IM}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{IU},\overrightarrow{IM}}$.

(c) Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{UM}$ (situé sous la droite (UM)) et la longueur du segment $[OU]$. (O est l'origine du repère)