

§ 9 : SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

1. Notion de suite

1.1 Définition et exemples

DÉFINITION 1. Une *suite réelle* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction définie sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{R} . L'image de n par la suite u se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* de rang n de la suite (u_n) (ou le terme d'*indice* n).

De même, une *suite complexe* est une fonction de \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{C} .

REMARQUE 1. La suite est notée entre parenthèses $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un terme de la suite, sans parenthèse : u_n . (même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).

Une suite peut être définie à partir d'un entier n_0 plutôt que sur \mathbb{N} , les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geq n_0$).

\triangle une suite ne peut pas être dérivée : pour être dérivable en x , une fonction doit être définie sur un intervalle, qui n'est pas réduit à un nombre, et qui contient x .

EXEMPLE 1. \textcircled{S} *Suites explicites.* Une suite (u_n) est *explicite* si elle est définie par une fonction f et la relation $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n^2$. Calculer u_0 , u_1 , u_2 , $u_n + 1$ et u_{n+1} .

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_{2n} et v_{2n+1} .

EXEMPLE 2. \textcircled{S} *Suites définies par récurrence.* Une suite est définie par *récurrence* lorsqu'on en donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation qui permet de définir un terme en fonction de termes précédents :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} = a_n - 2$. Donner a_1 , a_2 , a_3 et a_n .

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = (n+1)b_n$. Donner b_1 , b_2 , b_3 , b_4 et b_n .

EXEMPLE 3. \textcircled{S} *Suites sommes.* Soit (c_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n 2^{k+1}$. Expliciter c_n .

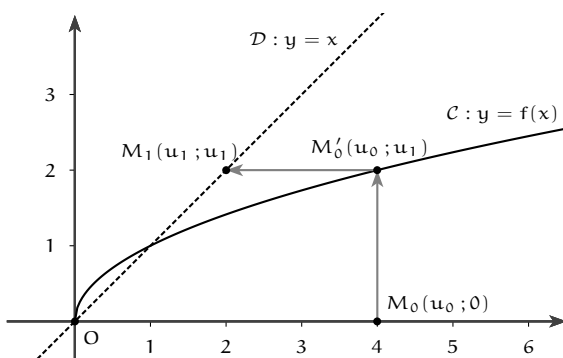
EXEMPLE 4. \textcircled{S} *Suites implicites.* Justifier l'existence d'une suite (α_n) où α_n est l'unique solution sur $[0; 1]$ de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Calculer α_0 , α_1 et α_2 .

1.2 Représentation des suites réelles

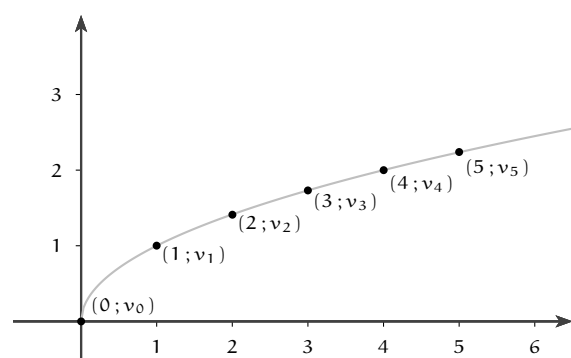
MÉTHODE 1. Représenter une suite réelle définie par récurrence

Pour représenter une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on trace la courbe \mathcal{C} de f et la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$. On place le point M_0 de coordonnées $(u_0; 0)$. On représente la suite en itérant le procédé suivant. On représente le point M_{n+1} d'abscisse u_{n+1} à partir du point M_n d'abscisse u_n en traçant :

- ★ le point $M'_n(u_n; u_{n+1})$ d'intersection de la parallèle à (Oy) passant par M_n avec la courbe \mathcal{C} .
- ★ le point $M_{n+1}(u_{n+1}; u_{n+1})$ d'intersection de la parallèle à (Ox) passant par M'_n avec la droite \mathcal{D} .



Suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$



Suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sqrt{n}$

L'ensemble des points de coordonnées $(n; f(n))$ représentent les termes d'une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie explicitement par $v_n = f(n)$.

△ Ces deux façons de générer des suites produisent des suites différentes pour une même fonction f .

1.3 Suites remarquables

Les deux propositions qui suivent se prouvent par récurrence.

DÉFINITION 2. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *arithmétique* de raison $r \in \mathbb{C}$, si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.

PROPOSITION 1. SUITES ARITHMÉTIQUES

- ① $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r si et seulement si, $\forall n \geq n_0$, $u_n = r \times (n - n_0) + u_{n_0}$.
- ② $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ③ Si u est arithmétique de raison r , $\sum u_k = (\text{nb de termes}) \times (\text{moyenne des extrêmes})$

EXEMPLE 5. Montrer que la somme des n premiers nombres impairs est un carré.

DÉFINITION 3. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite *géométrique* de raison $q \in \mathbb{C}$, si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

PROPOSITION 2. SUITES GÉOMÉTRIQUES

- ① $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *géométrique* de raison q , si et seulement si, $\forall n \geq n_0$, $u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}$.
- ② si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- ③ Si u est géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum u_k = (\text{1er terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$

EXEMPLE 6. Nature et forme récurrente de la suite (v_n) de l'exemple 1 ? De la suite (a_n) de l'exemple 2 ?

EXEMPLE 7. ☞ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$. Démontrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$ est géométrique. En déduire une forme explicite de u .

1.4 Opérations sur les suites

DÉFINITION 4. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni de trois opérations :

- ① une addition (interne) : pour toutes suites u et v , $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ② une multiplication (externe) : pour tout réel λ et toute suite u , $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ③ une multiplication (interne) : pour toutes suites u et v , $u v = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes est muni des mêmes opérations (avec une multiplication externe par un nombre complexe λ)

1.5 Suites bornées

DÉFINITION 5. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n| < M$. En écriture symbolique : $(u_n)_{n \geq n_0}$ bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n| < M$.

EXEMPLE 8. ☞ Montrer que $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Définir avec des quantificateurs ce qu'est une suite non bornée et vérifier que $(n - ni)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

2. Limites de suites

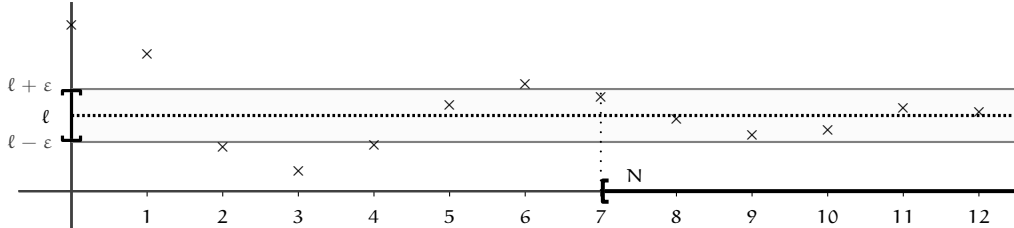
2.1 Suites convergentes

DÉFINITION 6. Une suite converge vers 0 si et seulement si, pour tout réel strictement positif (même petit) ε , il existe un rang au delà duquel tous les termes de la suite ont un module plus petit que ε . Symboliquement : u converge vers 0 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$.

Une suite u est *convergente*, de limite $\ell \in \mathbb{C}$, si et seulement si la suite $u - \ell$ converge vers 0.

On écrira : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \rightarrow \ell$.

Si la suite u n'est pas convergente, elle est dite *divergente*.



REMARQUE 2. Si une suite converge, sa limite est unique.

EXEMPLE 9. ☞ Montrer avec la définition que la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrer avec la définition que la suite constante $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

EXEMPLE 10. ☞ Démontrer qu'une suite convergente est bornée. En déduire que $(n - in)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

PROPOSITION 3. OPÉRATIONS SUR LES SUITES CONVERGENTES

Soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' . Alors :

- * $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$
- * λu converge vers $\lambda \ell$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- * uv converge vers $\ell \ell'$.
- * u/v converge vers ℓ/ℓ' , si v n'a pas de terme nul, et $\ell' \neq 0$.
- * la *suite extraite* $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si φ est une suite strictement croissante à valeurs dans \mathbb{N} .
- * $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow \ell} f(x)$ si f est une fonction continue en ℓ .

EXEMPLE 11. Utiliser l'avant-dernier point avec $\varphi(n) = 2n$ puis $\varphi(n) = 2n + 1$, pour prouver que la suite v , définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n$, diverge.

2.2 Suites réelles qui divergent vers l'infini

DÉFINITION 7. Une suite réelle est *divergente vers plus l'infini* si et seulement si, pour tout réel A fixé (même grand), il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A . Symboliquement : $u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.

Une u suite diverge vers moins l'infini si $-u$ diverge vers $+\infty$.

⚠ cette notion n'a pas de sens pour les suites complexes.

EXEMPLE 12. Démontrer avec la définition que $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

REMARQUE 3. Les opérations obéissent aux règles habituelles, les formes indéterminées qui nécessitent une étude plus poussée sont « $\infty - \infty$ », « $\infty \times 0$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », « 1^∞ », ...

EXEMPLE 13. ☞ Calculer si elles existent les limites de $n \ln(n), e^{\frac{1}{n^2}}, \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$.

2.3 Méthodes de comparaison

Les méthodes vues au chapitre 7 « analyse asymptotique s'appliquent aux suites :

EXEMPLE 14. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n$.

EXEMPLE 15. En tenant compte de l'inégalité de Bernoulli $\forall x \in]-1; +\infty[, \forall n > 0, (1+x)^n \geq 1+nx$ (qui se prouve par récurrence), démontrer que $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$, puis que $q^n \rightarrow 0$ si $|q| < 1$.

EXEMPLE 16. Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$\textcircled{1} n^2 - 5n + \ln(n)^4 \quad \textcircled{2} \frac{n^2 \sin(\frac{1}{n})}{2n+1} \quad \textcircled{3} \frac{n3^n \ln(1 + \frac{3}{n})}{3^n + n^3} \quad \textcircled{4} n \ln \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}}}$$

3. Suites réelles

3.1 Suites monotones

DÉFINITION 8. Une suite (u_n) est, à partir du rang n_0 ,

- ★ *strictement croissante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- ★ *strictement décroissante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
- ★ *strictement monotone* si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- ★ *constante* si et seulement si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit une suite *croissante*, *décroissante* ou *monotone* de même, avec des inégalités larges.

PROPOSITION 4. CRITÈRES DE CROISSANCE STRICTE

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang n_0 si

- ① pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- ② pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

REMARQUE 4. On obtient des critères pour les suites croissantes en remplaçant les inégalités finales par des inégalités larges. Les critères pour les suites strictement décroissantes et décroissantes s'obtiennent en changeant le sens de la dernière inégalité.

Démonstration. à partir de la définition.

EXEMPLE 17. Étudier la monotonie des suites :

- ① (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n k^2$
- ② (b_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 3^n$
- ③ (k_n) arithmétique, de raison r
- ④ (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 - n$

REMARQUE 5 (Suites explicites). une suite définie par $u = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ où f est une fonction sur \mathbb{R}_+ peut s'étudier à travers f :

- ★ si f est monotone sur $[n_0; +\infty[$, u a la même monotonie à partir du rang n_0 .
- ★ si f a une limite en $+\infty$, u a la même limite en $+\infty$.

⚠ l'absence de limite ou de monotonie pour f ne signifie rien pour u : considérer par exemple $f : x \mapsto x \cos(2\pi x)$ et $u = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

3.2 Critère de convergence monotone

DÉFINITION 9. une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- * *minorée* $\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$. (m est un minorant)
- * *majorée* $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. (M est un majorant)

EXEMPLE 18. \textcircled{S} Prouver que toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

THÉORÈME 5. CONVERGENCE MONOTONE

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

REMARQUE 6 (arguments moraux.). une suite croissante ne peut « osciller » ni tendre vers $-\infty$, et une suite majorée ne peut tendre vers $+\infty$: une suite vérifiant ces deux propriétés converge.

EXEMPLE 19. \textcircled{S} Donner un exemple de suite croissante qui diverge, et de suite majorée qui diverge.

EXEMPLE 20. Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Conjecturer la monotonie et un minorant de la suite u à partir du graphique de la méthode 1.

Démontrer les conjectures puis la convergence de la suite u .

MÉTHODE 2. « du point fixe »

Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I (de la forme $[a; b], [a; +\infty[,]-\infty; b]$ ou $] -\infty; +\infty[$ avec a et b réels), tel que I contient tous les termes de la suite. Si u converge vers une limite ℓ , cette limite est une solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ sur I (on dit que ℓ est un *point fixe* de f).

En effet, $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité de f .

\triangle cette méthode permet de trouver des limites potentielles mais ne prouve en aucun cas la convergence de u . Pour cela, il faut recourir à d'autres arguments, comme le théorème de convergence monotone.

EXEMPLE 21. Déterminer la limite de u définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Suites adjacentes

DÉFINITION 10. Les suites u et v sont dites *adjacentes* si et seulement si : $\textcircled{1}$ la suite u est croissante. $\textcircled{2}$ la suite v est décroissante. $\textcircled{3}$ $v_n - u_n \rightarrow 0$.

THÉORÈME 6. DES SUITES ADJACENTES.

Deux suites u et v adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ .
De plus $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme v décroît, $v_{n+1} \leq v_n$ et comme (u_n) croît, $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par différence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$.

Or $v_n - u_n \rightarrow 0$, donc la suite $v - u$ décroît vers 0 : ses termes sont positifs : $v_n - u_n \geq 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n \geq u_0$ (car (u_n) croît). Ainsi, la suite v est minorée par u_0 et décroissante par hypothèse, donc converge vers une limite ℓ . De plus, $u_n = (u_n - v_n) + v_n \rightarrow 0 + \ell = \ell$. Donc u et v convergent vers ℓ . \square

EXEMPLE 22. Soient u et v définies par $u_0 = 1, v_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

- $\textcircled{1}$ Montrer que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- $\textcircled{2}$ Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- $\textcircled{3}$ En considérant $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v .

BILAN DU § 9

Prérequis

- ① §1 Logique. Démonstration par récurrence, sommes de référence, sommes télescopiques
- ② §2 Fonctions usuelles. Tout
- ③ §7 Analyse asymptotique. Développements limités, définition d'équivalent, théorème d'encadrement ..

Objectifs prioritaires

- ① formes récurrente, explicite et formule de somme des suites arithmétiques et géométriques 1.3
 - (a) exercice 4
- ② connaître la définition d'une suite bornée : 1.5
- ③ savoir étudier la monotonie d'une suite réelle 3.1
- ④ maîtriser le théorème de convergence monotone 3.2
 - (a) savoir utiliser le théorème 5 de convergence monotone
 - (b) savoir trouver une limite par la méthode du point fixe 2
 - (c) exercice 4, 3 et 10
- ⑤ connaître la définition des suites adjacentes, et leur théorème de convergence 3.3
 - (a) exercices 5 et 8

Objectifs secondaires

- ① savoir représenter une suite 1.2
- ② maîtriser les algorithmes classiques liés aux études de suite (voir TP infos - maths 2) :
 - (a) programmer le calcul du terme de rang n d'une suite récurrente (TP 2, section 1)
 - (b) programmer le calcul du plus petit rang à partir duquel une suite croissante dépasse un seuil ...
 - (c) programmer le calcul de la somme des termes d'une suite

Approfondissement

- ① savoir utiliser les définitions 6 et 7 d'une suite convergente ou divergente vers l'infini

TD DU §9

Exercice 1. Équivalent d'une suite

Donner un équivalent simple, puis le comportement asymptotique, de la suite définie par :

- ① $\forall n \geq 1, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ② $\forall n \geq 2, v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ ③ $\forall n \geq 1, w_n = n^{1/n} - 1$
 ④ $\forall n \geq 1, s_n = n \sin \frac{1}{n^2}$ ⑤ $\forall n \geq 1, t_n = \ln(n+1) - \ln n$ ⑥ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tan \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 2. Équivalents de sommes

Montrer que ① $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$. ② $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k} \sim \frac{1}{n^n}$.

Exercice 3. Prépondérance de factorielle sur les exponentielle de base a

On souhaite prouver que $\forall a \in \mathbb{C}, a^n = o(n!)$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite u par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n}{n!}$

- ① Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{a}{n+1} u_n$.
- ② En déduire que la suite u est décroissante à partir d'un certain rang, et qu'elle est convergente.
- ③ Déterminer la limite de la suite u et conclure.
- ④ Conclure.

Exercice 4. Étude d'une suite homographique

Soit $f :]-\infty; 6[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{9}{6-x}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- ① Dresser le tableau de variations de f . En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.
Étudier la monotonie, la convergence et la limite éventuelle de u .
- ② Soit v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 3}$. Quelle est sa nature ? En déduire une expression explicite de u et vérifier les résultats de la question précédente.

Exercice 5. Divergence de la série harmonique

L'objectif est d'étudier le comportement de la suite h définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On souhaite montrer que $h_n \sim \ln(n)$, et, plus précisément, que $h_n - \ln(n)$ converge vers une limite notée γ .

Les mathématiciens ignorent encore si γ , que l'on appelle la constante d'Euler, est un nombre irrationnel.

On considère les suites u et v définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = h_n - \ln(n+1)$ et $v_n = h_n - \ln(n)$.

- ① À l'aide de développements limités, donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$, puis de $v_{n+1} - v_n$.
- ② Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?
- ③ En déduire $h_n \sim \ln(n)$. Que dire de la convergence de h ?

Exercice 6. Étude d'une suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x - 1$.

- ① Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n .
- ② Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(\alpha_n) \leq g_{n+1}(\alpha_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
- ③ Montrer que la suite (α_n) converge, puis calculer sa limite.

Exercice 7. Suite implicite avec partie entière

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe sur $[n; n+1[$ une unique solution u_n à l'équation $x - [x] = \frac{1}{x^2}$.

Montrer que $u_n \sim n$. En déduire un équivalent simple de $u_n - n$.

Exercice 8. Théorème des valeurs intermédiaires

L'objectif du problème est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

On suppose que $f(a)f(b) \leq 0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

- ① Montrer que $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique. (on pourra distinguer deux cas).
- ② Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
- ③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. En justifiant soigneusement le passage à la limite, montrer que $f(\ell) = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.
- ④ Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et y compris entre $g(a)$ et $g(b)$. Soit $f(x) = g(x) - y$. Montrer que l'équation $g(x) = y$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.
- ⑤ Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètres deux réels $a < b$, un réel $p > 0$, une fonction f continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$, et qui renvoie une valeur approchée à p près d'une solution x de $f(x) = 0$.

Exercice 9. Écriture fractionnaire d'un nombre à partie décimale périodique

L'objectif est d'écrire le nombre $0,27272727\dots$ sous forme de fraction.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,27$ et de raison $0,01$.

Soit (s_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- ① Calculer u_1 , u_2 et u_3 ainsi que s_0, s_1, s_2 et s_3 . Exprimer les résultats sous forme de nombres décimaux.
- ② Donner, sous forme décimale, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.
- ③ Pour tout entier naturel n , exprimer s_n en fonction de n .
- ④ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ sous forme d'une fraction et conclure.
- ⑤ Imiter la démarche pour obtenir l'écriture de $0,481481481\dots$ sous forme de fraction.

Exercice 10. Suites de Héron

L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples.

Soit $a \in [1; +\infty[$ et f la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} + x \right)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [\sqrt{a}; a]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

- ① Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- ② Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.
En déduire : $\forall x \in [\sqrt{a}; a]$, $f(x) \in [\sqrt{a}; a]$.
- ③ Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}; a]$. (ainsi $u_n \neq 0$, donc la suite est bien définie)
- ④ Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ .
- ⑤ Démontrer que ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} + \ell \right)$. En déduire la valeur de la limite ℓ .
- ⑥ Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction. À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2} \approx 1,414214$?
- ⑦ Dans cette question et les suivantes, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n) .
On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et \sqrt{a} .
On suppose que u_0 approche \sqrt{a} par excès à $0,5$ près : $0 \leq v_0 \leq 0,5$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leq v_n^2$.
- ⑧ Par récurrence, prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{2^n}}$
- ⑨ Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètre un réel $p > 0$ et renvoie comme résultat la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à p près en utilisant la méthode ci-dessus.