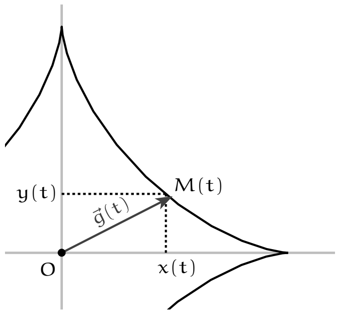
§ 5 : Courbes paramétrées

1. Notion de courbe paramétrée

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1.1 Fonctions vectorielles et courbes paramétrées



DÉFINITION 1. Une *fonction vectorielle* est de la forme $\vec{g} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
En particulier, une fonction vectorielle du plan est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on note $x(t)$ l'abscisse et $y(t)$ l'ordonnée de $\vec{g}(t)$.
Les fonctions $x : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)$ et $y : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t)$ sont les *fonctions coordonnées* de la fonction vectorielle $\vec{g}$.

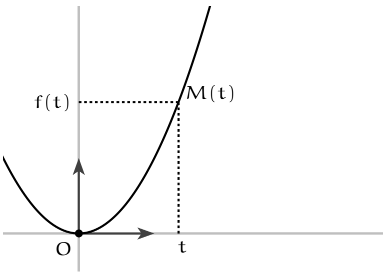
DÉFINITION 2. Soit $\vec{g} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle du plan.
L'ensemble $\Gamma = \{M(x(t);y(t)) : t \in \mathcal{D}\}$ est la *courbe paramétrée* par $\vec{g}$.
On dit encore que Γ est le *support* de $\vec{g}$, et que $\vec{g}$ est un paramétrage de Γ.

REMARQUE 1. On omettra souvent la flèche dans l'écriture d'une fonction vectorielle, écrivant g au lieu de $\vec{g}$.

EXEMPLE 1. On connaît déjà les courbes paramétrées suivantes :

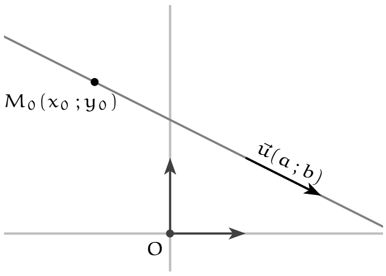
Courbe d'une fonction f

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{array} \right.$$



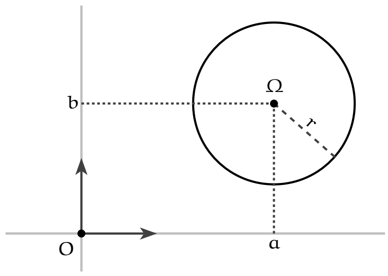
Droite

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a\,t \\ y(t) = y_0 + b\,t \end{array} \right.$$



Cercle

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{array} \right.$$

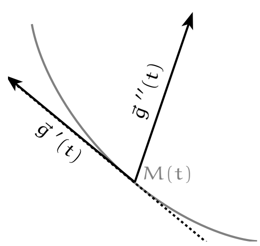


REMARQUE 2. ⚠ comme dans le cas des droites, deux paramétrages différents peuvent avoir un même support.

1.2 Vecteur vitesse, vecteur accélération

DÉFINITION 3. Soit $\vec{g}$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle I. Soit t_0 un réel de I ou une borne de I (éventuellement infinie). On dit que $\vec{g}$ admet une limite en t_0 si et seulement si ses fonctions coordonnées admettent des limites finies en t_0.

On définit également la continuité, la dérivabilité d'une fonction vectorielle sur un intervalle I par celle de ses fonctions coordonnées.



DÉFINITION 4. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et $\vec{g}$ une fonction vectorielle définie sur I et dérivable en t_0. Pour $t \in I$, on note $M(t)$ le point tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g}(t)$.
Le vecteur $\vec{g}\,'(t_0)$ est appelé *vecteur vitesse* de $\vec{g}$ en t_0.
Si le vecteur vitesse $\vec{g}\,'(t_0)$ est nul, le point $M(t_0)$ est *stationnaire*, ou singulier.
Sinon, il est dit *régulier*.
Si $\vec{g}$ est deux fois dérivable en t_0, $\vec{g}\,''(t_0)$ est le *vecteur accélération* de $\vec{g}$ en t_0.

EXEMPLE 2. ✎ Dans le cas du cercle, exemple 1, donner une expression du vecteur vitesse $\vec{g}\,'(t)$ et du vecteur accélération $\vec{g}\,''(t)$ au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Vérifier que $\vec{g}\,'(t) \perp \vec{g}\,''(t)$, que $t \mapsto \|\vec{g}\,'(t)\|$ est constante, et que $\vec{g}\,''(t)$ est colinéaire et de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}(t)$.

Remarque 3. En cinétique, une fonction vectorielle s'interprète comme le vecteur position d'un point mobile en fonction du paramètre temporel, la courbe étant la trajectoire de ce point. Cette interprétation justifie la terminologie de vecteurs vitesse et accélération.

Le mouvement est uniforme lorsque $t \mapsto \|\vec{g}\,'(t)\|$ est constante, et rectiligne si le support est une droite.

Définition 5. Soit I un intervalle et $\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t)\,;y(t))$ une fonction vectorielle. On note M le point de paramètre $t_0 \in I$ de la courbe Γ paramétrée par $\vec{g}$. Lorsque la suivante existe et est finie,

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$$

la droite d'équation $y = a(x - x(t_0)) + y(t_0)$ est la *tangente* à Γ en M.

Lorsque la limite est infinie, la droite d'équation $x = x(t_0)$ est la *tangente* (verticale) à Γ en M.

On appelle *normale* à la courbe Γ en M la droite qui passe par M et qui est perpendiculaire à la tangente en Γ en M.

Proposition 1. Vecteur tangent

Soit I un intervalle et $\vec{g}$ une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $t \in I$. Un vecteur directeur de la tangente à la courbe paramétrée par $\vec{g}$ au point de paramètre t est

- $\star$ $\vec{g}'(t) = (x'(t)\,;y'(t))$ si $\vec{g}'(t) \neq \vec{o}$ (c'est-à-dire si le point de paramètre t n'est pas stationnaire).
- $\star$ $\vec{g}^{(n)}(t)$ si $\vec{g}^{(n)}(t) \neq \vec{o}$ mais $\vec{g}'(t) = \cdots = \vec{g}^{(n-1)}(t) = 0$ (et $\vec{g}$ suffisamment dérivable)

On appelle *vecteur tangent* tout vecteur directeur de la tangente.

Démonstration. On démontrera ce résultat lors du chapitre sur les développements limités. □

Exemple 3 (Astroïde). ✎ L'astroïde est la courbe paramétrée par $\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{array} \right.$.

Donner une équation de la normale à l'astroïde au point de paramètre $\pi/4$.

Donner un vecteur tangent à l'astroïde au point de paramètre 0.

2. Courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes

2.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrée cartésienne

Méthode 1. Étude d'une courbe paramétrée cartésienne

① on étudie le domaine de définition des fonctions coordonnées x et y.

② on recherche les symétries (section 2.2) et on restreint le domaine d'étude.

③ on étudie les variations simultanées de x et y (section 2.3).

④ on étudie les branches infinies (section 2.4).

⑤ on étudie (si demandé) les points multiples (section 2.5).

⑥ on trace les tangentes, asymptotes puis le support sur le domaine d'étude, on complète par symétrie.

2.2 Symétries

Soit $\vec{g}$ une courbe paramétrée définie sur $\mathcal{D}$ de fonctions coordonnées : x et y.

Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ une bijection et $\mathcal{D}_0 \subset D$ tels $\varphi(D_0) \cup \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. [1]

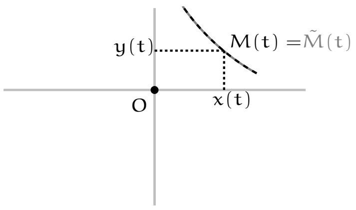
Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on note $\tilde{M}(t) = M(\varphi(t))$ le point de coordonnées $\tilde{x} = x\big(\varphi(t)\big)$ et $\tilde{y} = y\big(\varphi(t)\big)$.

(1). ou plus généralement tels que tout réel $t \in \mathcal{D}$ soit l'image d'un $t_0 \in \mathcal{D}_0$ par une composée successive de φ ou sa réciproque.

EXEMPLE 4. Pour une fonction $\vec{g}$ définie sur $\mathbb{R}$, l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto -t$ est bijective et $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}_+$ convient car $\mathcal{D}_0 \cup \varphi(\mathcal{D}_0) = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$. Le point $\tilde{M}(t)$ a pour coordonnées $\tilde{M}\big(x(-t)\,;y(-t)\big)$.

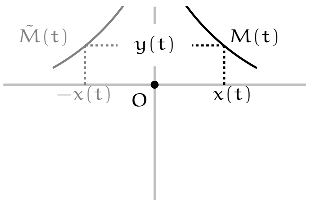
On peut restreindre l'étude de la courbe aux points de paramètres $t \in \mathcal{D}_0$ si $M(t)$ et $\tilde{M}(t)$ sont

confondus



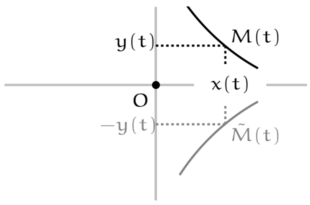
$x(\varphi(t)) = x(t)$ et $y(\varphi(t)) = y(t)$

symétriques par rapport à (Oy)



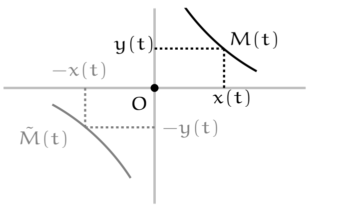
$x(\varphi(t)) = -x(t)$ et $y(\varphi(t)) = y(t)$

symétriques par rapport à (Ox)



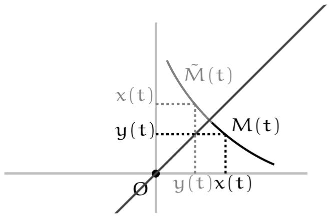
$x(\varphi(t)) = x(t)$ et $y(\varphi(t)) = -y(t)$

symétriques par rapport à O



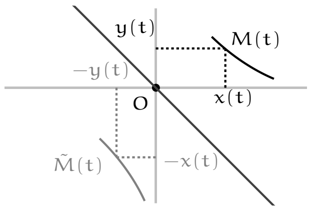
$x(\varphi(t)) = -x(t)$ et $y(\varphi(t)) = -y(t)$

symétriques par rapport à $y = x$



$x(\varphi(t)) = y(t)$ et $y(\varphi(t)) = x(t)$

symétriques par rapport à $y = -x$



$x(\varphi(t)) = -y(t)$ et $y(\varphi(t)) = -x(t)$

De même, $x(\varphi(t)) = -y(t)$ et $y(\varphi(t)) = x(t)$ signifient que $\tilde{M}$ est l'image de M par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O. Et $x(\varphi(t)) = y(t)$ et $y(\varphi(t)) = -x(t)$ signifient que $\tilde{M}$ est l'image de M par une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O.

MÉTHODE 2. Liste (non exhaustive) de bijections à étudier

- ⋆ $\varphi : t \mapsto t + T$ lorsque x et y sont T périodiques (une période commune est un multiple commun des périodes de x et y, le plus petit possible ! Rappelons que $\cos(\omega t)$ a pour période $T = 2\pi/\omega$). Cela permet de restreindre l'étude à $[-T/2\,;T/2]$ ou tout autre intervalle de longueur T).
- ⋆ $\varphi : t \mapsto -t$: lorsque x et y sont paires ou impaires. Permet de restreindre l'étude aux t positifs.
- ⋆ $t \mapsto a + b - t$ (si on effectue l'étude sur $[a\,;b]$, permet de restreindre à $[a\,;(a+b)/2]$.)
- ⋆ $t \mapsto 1/t$ si $\mathcal{D}$ ne contient pas 0, pour des fonctions avec fractions rationnelles, logarithmes…

EXEMPLE 5 (Astroïde). On reprend l'étude de l'astroïde définie dans l'exemple 3.

⋆ $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ par périodicité de sin et cos. On limite donc l'étude à $[-\pi\,;\pi]$.

⋆ $\forall t \in [-\pi\,;\pi],\ x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ car cosinus est paire et sinus impaire. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\pi]$.

⋆ $\forall t \in [0\,;\pi],\ x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ car $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

⋆ $\forall t \in [0\,;\frac{\pi}{2}],\ x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$.

Le fait d'oublier une symétrie n'empêche pas de réaliser l'étude, mais peut la compliquer et mener à des incohérences sur la courbe finale.

2.3 Variations simultanées

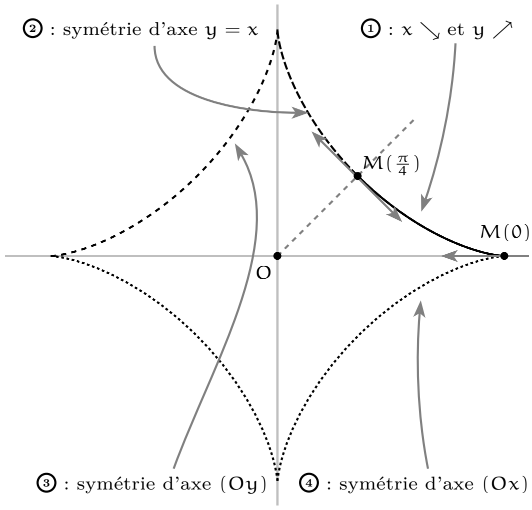
MÉTHODE 3. Présentation du tableau de variations de x et y

On étudie les variations des fonctions coordonnées x et y comme celles de n'importe quelle fonction, via leurs dérivées. On présentera les variations sous forme d'un seul tableau de 6 lignes : dans l'ordre, la ligne de t, celle de x', celle de x, celle de y, celle de y' et enfin une ligne précisant le coefficient directeur des tangentes ou l'existence de branche infinie.
On calculera les coordonnées des points significatifs et un vecteur directeur des tangentes significative (pour t aux bord du tableau, ou lorsque $x'(t)$ ou $y'(t) = 0$.

Exemple 6 (Astroïde). On reprend l'étude de l'astroïde définie dans l'exemple 3.

Les fonctions x et y sont dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t)$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
Rq	T.H.		-1



La tangente au point de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$ est dirigée par le vecteur $3\sqrt{2}/2\,(-1\,;1)$.

Le point de paramètre 0 est stationnaire. En calculant le vecteur accélération en 0 : $\vec{g}''(0) = (-3\,;0)$, (exemple 3), on en déduit que la tangente au point de paramètre 0 à l'astroïde est horizontale.

On peut alors tracer la courbe que l'on complète par les symétries détectées dans l'exemple 6.

2.4 Branches infinies

Définition 6. Soit I un intervalle et $\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(x(t)\,;y(t)\big)$.

Soit t_0 une extrémité de I (éventuellement infinie).

- ⋆ la courbe paramétrée par $\vec{g}$ admet une *branche infinie* en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} \|\vec{g}(t)\| = +\infty$.
- ⋆ la droite $\mathcal{D}$ est *asymptote* à la courbe de $\vec{g}$ en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} d(\mathcal{D}, M(t)) = 0$.

Remarque 4. Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax+by+c=0$, le critère précédent équivaut à $\lim\limits_{t\to t_0} ax(t)+by(t)+c=0$ en vertu de la formule de distance point-droite.

Méthode 4 (Détermination de branches infinies). La courbe paramétrée par $\vec{g}$ admet lorsque t tend vers t_0,

① une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$ si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$.

② une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$.

③ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$,

(a) une branche parabolique de direction (Ox) si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$.

(b) une branche parabolique de direction (Oy) si $\lim\limits_{t\to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| = +\infty$.

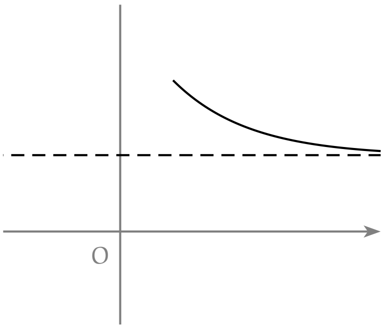
(c) et $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$,

i. une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$

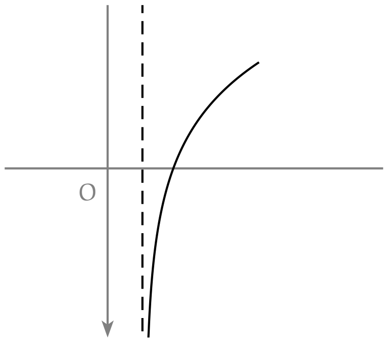
ii. une branche parabolique de direction $y = ax$ si $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t) - ax(t)| = +\infty$

④ ni asymptote, ni branche parabolique dans tous les autres cas.

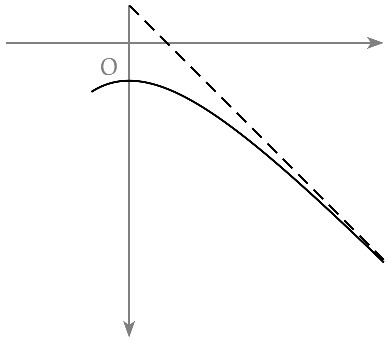
Asymptote horizontale $y = y_0$



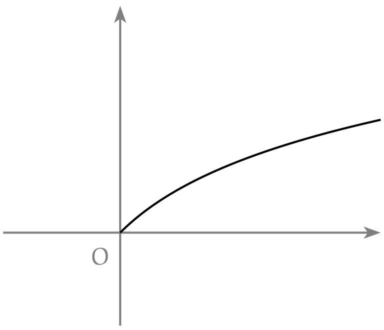
Asymptote verticale en $x = x_0$



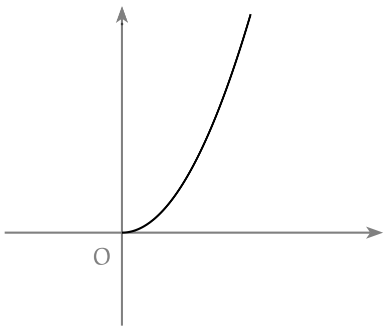
Asymptote oblique $y = ax + b$



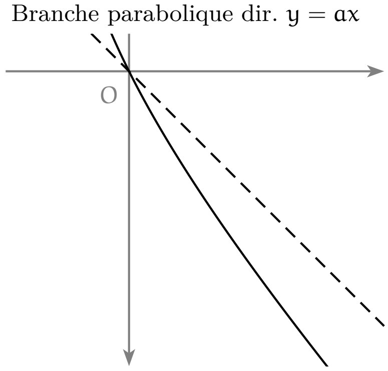
Branche parabolique dir. par (Ox)



Branche parabolique dir. (Oy)



Branche parabolique dir. $y = ax$



Exemple 7. ✎ Étudier $\vec{g} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{e^t}{t-1} \\ y(t) = t^2 - 2t \end{array} \right.$

2.5 Points multiples

Méthode 5. Recherche de points multiples

On recherche les points du support obtenus par des valeurs distinctes du paramètre t : on résout $\vec{g}(t) = \vec{g}(s)$ avec $t \neq s$. On cherchera aussi les tangentes en ces points.

Exemple 8. ✎ Étudier $\vec{g} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = t + \dfrac{1}{2-t} \\ y(t) = t^2 \end{array} \right.$

3. Notions de géométrie différentielle

3.1 Longueur d'une courbe

Définition 7. Soient $a < b$ réels et $\vec{g}$ une fonction vectorielle définie, dérivable et de dérivée continue sur $[a\,;b]$.

La *longueur* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ est : $L(\vec{g}, a, b) = \displaystyle\int_a^b \|\vec{g}\,'(t)\|\,dt$

Exemple 9. ✎ Calculer la longueur (a) : d'un cercle de rayon 1 ; (b) : de l'astroïde de l'exemple 3.

Bilan du § 5

Prérequis

① §3 Complexes : section 6 : trigonométrie ☐
② §2 Fonctions usuelles : en entier ! (mention spéciale pour les fonctions cosinus et sinus) ☐
③ §4 Géométrie plane : tout ! ☐

Objectifs prioritaires

① savoir étudier une courbe paramétrée (paragraphe 2) ☐
② savoir trouver le vecteur tangent à une courbe en un point (paragraphe 1.2) ☐
③ savoir identifier les symétries d'une courbe (paragraphe 2.2) ☐
④ savoir dresser un tableau de variations simultanées (paragraphe 2.3) ☐
⑤ savoir trouver un vecteur tangent à une courbe en un point de paramètre donné (proposition 1) ☐
⑥ savoir reconnaître les branches infinies (paragraphe 2.4) ☐
⑦ savoir tracer la courbe à partir de tout ça ☐

Objectifs secondaires

① savoir trouver les points multiples d'une courbe paramétrée (paragraphe 2.5) ☐
② Connaître les différentes formules de longueur de courbes (paragraphe 3.1) ☐

TD du § 5

Exercice 1. Astroïde

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère l'astroïde $\mathcal{A}$, courbe paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

On note M_t le point de $\mathcal{A}$ de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

① Étudier et représenter l'astroïde $\mathcal{A}$.

② Soit $t \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$. Donner les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}_t$, normal à l'astroïde au point M_t.
En déduire que la tangente $\mathcal{T}$ à l'astroïde au point M_t a pour équation $\sin(t)x + \cos(t)y = \cos(t)\sin(t)$.

③ La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe au point de paramètre t coupe l'axe des abscisses en A_t et l'axe des ordonnées en B_t. Calculer les coordonnées de ces deux points et la longueur du segment $[A_tB_t]$.
En déduire un procédé pour construire une astroïde avec une règle de longueur a.

④ Montrer que deux tangentes à l'astroïde sont perpendiculaires si et seulement si elles sont tangentes en M_t et $M_{t-\frac{\pi}{2}}$, où t est un réel.
Déterminer, en fonction de t, les coordonnées du point d'intersection N_t de ces deux tangentes.
Étudier et représenter la courbe orthoptique de l'astroïde. (courbe parcourue par N_t)

Exercice 2. Bicorne

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère la bicorne, paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

① Étudier et représenter la bicorne.

② Montrer que le lieu des orthocentres du triangle ABM, où $A(-a\,;0)$, $B(a\,;0)$ et M est un point mobile du cercle de centre $C(0\,;2a)$ et de rayon a, est une bicorne.

Exercice 3. Cycloïde

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère la cycloïde $\mathcal{C}$, courbe paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

On note M_t le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

① Pour tous réels t, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$.
En déduire que $\mathcal{C}$ est invariante par une transformation que l'on précisera.

② Étudier et représenter la cycloïde $\mathcal{C}$.

③ Vérifier que la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite est une cycloïde.

Exercice 4. Étude de courbes paramétrées

Étudier

① la tractrice : $t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = t - \mathrm{th}\,(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(t)} \end{array}\right.$ ② $t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = \cos^2(t) + \ln|\sin(t)| \\ y(t) = \sin(t) \end{array}\right.$ ③ $t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = \ln|1-t| \\ y(t) = \ln|1+t| \end{array}\right.$

④ la deltoïde : $t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array}\right.$ ⑤ la courbe de Lissajous : $t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{array}\right.$

Exercice 5. Axe de symétrie

Soit la fonction définie par $\vec{g} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$.

① Étudier $\vec{g}$ et construire sa courbe. On vérifiera qu'elle admet un axe de symétrie.

② Montrer que l'ensemble des points, par lesquels passent deux tangentes à la courbe orthogonales entre elles, est une droite dont on donnera une équation.

Exercice 6. Strophoïde droite Écrit ATS 2011

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$, de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées $(1\,;0)$. Soit M un point du cercle tel que $\theta = (\vec{\imath};\overrightarrow{OM})$ avec $0 \leqslant \theta < \pi$, O' la projection orthogonale de O sur (AM) (c'est aussi le milieu de $[AM]$), A' la projection orthogonale de A sur (OM), M' la projection orthogonale de M sur (OA). L'intersection des trois hauteurs (OO'), (AA') et (MM') est l'orthocentre H du triangle (OAM).

① Donner les coordonnées des points M, M', O' en fonction de θ.

② Montrer que les coordonnées $(x(\theta)\,;y(\theta))$ du point H sont $(\cos(\theta)\,;\cos(\theta)\tan(\frac{\theta}{2}))$. (on conviendra que pour $\theta = 0$, $H = A$).

③ Calculer $(x'(\theta)\,;y'(\theta))$

④ On rappelle que si on pose $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, on a : $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Montrer, en exprimant tout à l'aide de t, que $y'(\theta) = \cos(\theta) - \dfrac{1}{1+\cos(\theta)}$.

En déduire le signe de $y'(\theta)$ pour $0 \leqslant \theta < \pi$. On notera θ_0 le réel de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

⑤ Faire le tableau de variation conjoint de $(x(\theta)\,;y(\theta))$ pour $0 \leqslant \theta < \pi$. On précisera les valeurs ou les limites de $x(\theta)$, $y(\theta)$ et de $x'(\theta)$, $y'(\theta)$ en 0 et π, ainsi qu'aux extrema éventuels de x et y.

⑥ On appelle Γ la courbe paramétrée décrite par $(x(\theta)\,;y(\theta))$. Montrer que Γ admet une asymptote verticale à préciser.

⑦ Donner une représentation graphique de Γ en plaçant l'asymptote, les points et les tangentes à ces points pour les valeurs 0, θ_0, $\frac{\pi}{2}$ de θ. (on prendra $\cos(\theta_0) \approx 0{,}62$ et $\cos(\theta_0)\tan(\frac{\theta_0}{2}) \approx 0{,}30$).

⑧ Montrer que les coordonnées $(x\,;y)$ des points de la courbe Γ vérifient $x(x^2+y^2) = x^2 - y^2$.

Exercice 7. Tangentes d'une courbe remarquable écrit ATS 2012

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

① Reconnaître cette courbe.

② Donner les composantes d'un vecteur tangente $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

③ On considère deux points quelconques $A = M(a)$ et $B = M(b)$ de cette courbe, qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t.

Donner une équation de la droite T_A, tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.

De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.

④ Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

⑤ Déterminer les coordonnées du point M, intersection des deux tangentes T_A et T_B.

⑥ Comparer les ordonnées des points I et M.

⑦ Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I.

⑧ Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).

⑨ Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A, B, A', B', $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I, M, C et T_C.