§ 4 : Géométrie plane

1. Repérage dans le plan

1.1 Vocabulaire de la géométrie vectorielle

On identifie le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes. On note $\vec{o}$ le vecteur d'affixe nulle.

Définition 1. Comme au chapitre §3, étant donnés les vecteurs $\vec{u}$ d'affixe complexe z et $\vec{v}$ d'affixe z', on définit :

- ⋆ la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ d'affixe $z+z'$
- ⋆ le produit du réel λ par le vecteur $\vec{u}$ comme le vecteur $\lambda\vec{u}$ d'affixe λz.
- ⋆ la norme de $\vec{u}$ par $\|\vec{u}\| = |z|$.
- ⋆ si z et z' non nuls, une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ par $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \arg(z'/z)\ [2\pi]$

Définition 2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si $\vec{u} = \vec{o}$ ou s'il existe λ réel tel que $\vec{v} = \lambda u$. On dit aussi que les deux vecteurs forment une famille *liée*.

Lorsque deux vecteurs sont non colinéaires, on dit qu'ils forment une famille *libre*.

Définition 3. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ d'affixe complexe z et $\vec{v}$ d'affixe z', on définit :

- ⋆ le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u}\cdot\vec{v} = \Re\mathrm{e}(\bar{z}z')$.
  Deux vecteurs sont *orthogonaux* si et seulement si leur produit scalaire est nul : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- ⋆ le *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\det(\vec{u};\vec{v}) = \Im\mathrm{m}(\bar{z}z')$

Proposition 1. Déterminant et colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul : $\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

Démonstration. Si $\vec{u} = \vec{o}$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = \Im\mathrm{m}(\bar{0}z') = 0$.

Si $\vec{u} \neq \vec{o}$, on a : $\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{\bar{z}z'}{\bar{z}z} \in \mathbb{R} \iff \bar{z}z' \in \mathbb{R} \iff \det(\vec{u};\vec{v}) = \Im\mathrm{m}(\bar{z}z') = 0$ □

1.2 Base du plan vectoriel

Définition 4. Une *base* du plan vectoriel est la donnée d'un couple (ordonné) de vecteurs non colinéaires $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On qualifie la base de :

- ⋆ *directe* lorsque $\det(\vec{\imath};\vec{\jmath}) > 0$, et *indirect* sinon.
- ⋆ *orthogonale* si et seulement si $\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$.
- ⋆ *orthonormée* si et seulement si elle est orthogonale et que ses vecteurs sont unitaires : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

Proposition 2. Coordonnées dans une base

Si $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, il existe deux réels x et y uniques tels que :

$$\vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Le réel x est l'abscisse du vecteur $\vec{w}$ et et le réel y l'ordonnée du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Les nombres x et y sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

On note $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, ou $\vec{w}(x;y)$, ou encore $\vec{w}\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$.

Démonstration. En développant, on remarque que $\det(\vec{w};\vec{\jmath})\vec{\imath}+\det(\vec{\imath};\vec{w})\vec{\jmath}=\det(\vec{\imath};\vec{\jmath})\vec{w}$.

Donc $x=\det(\vec{w};\vec{\jmath})/\det(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et $y=\det(\vec{\imath};\vec{w})/\det(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ conviennent, d'où l'existence.

Si on a aussi $\vec{w}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$, par différence $\vec{o}=(x-x')\vec{\imath}+(y-y')\vec{\jmath}$. Si $x-x'\neq 0$ ou $y-y'\neq 0$, alors $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires, ce qui est absurde : donc $x=x'$ et $y=y'$, d'où l'unicité. □

1.3 Géométrie affine

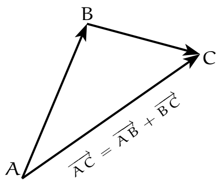
On appel *point* du plan affine tout élément de $\mathbb{R}^2$, que l'on identifie à $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 5. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur d'affixe $b-a$ où a et b désignent les affixes respectives des points A et B.

L'image d'un point A d'affixe a par la translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe z est le point A' d'affixe $a+z$

PROPOSITION 3. RELATION DE CHASLES

Soient trois points A, B et C d'un espace affine $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



Démonstration. Si a, b et c sont les affixes respectives de A, B et C, l'affixe de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ est $b-a+c-b=c-a$, c'est-à-dire l'affixe de $\overrightarrow{AC}$.

DÉFINITION 6. On appelle *repère* du plan tout triplet $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ formé d'un point O du plan affine et de deux vecteurs du plan, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$), non colinéaires. On le qualifie de direct, orthogonal ou orthonormé de la même façon que la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

REMARQUE 1. Étant donné un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et un point M du plan affine, de la proposition 2 on déduit l'existence d'un unique couple $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ est formé des *coordonnées* du point M, dont l'*abscisse* est x, et l'*ordonnée*, y.

On note $M(x;y)$ ou $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$.

On en déduit immédiatement :

PROPOSITION 4. Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soient les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$, et $\vec{v}\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$, le réel λ. On a :

① $\vec{u}+\vec{v}\begin{vmatrix}x+x'\\y+y'\end{vmatrix}$ ② $\lambda\vec{u}\begin{vmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{vmatrix}$ ③ $B=A+\vec{u}\begin{vmatrix}x_A+x\\y_A+y\end{vmatrix}$ ④ $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{vmatrix}$ ⑤ milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

REMARQUE 2. On rappelle également que l'*isobarycentre* d'une famille de point a pour coordonnées la moyenne des coordonnées de la famille de point. En particulier, le milieu d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités, le centre de gravité d'un triangle, l'isobarycentre de ses sommets…

On parle de *barycentre* lorsque l'on considère une moyenne pondérée (avec des coefficients pour chaque point, que l'on appelle masses).

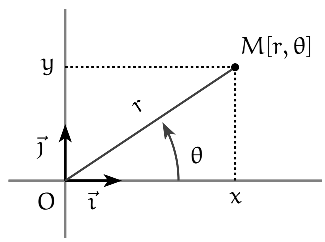
1.4 Coordonnées polaires

DÉFINITION 7. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Un point M a pour *coordonnées polaires* les réels $[r;\theta]$, si et seulement si

$$\overrightarrow{OM}=r\cos(\theta)\,\vec{\imath}+r\sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

Les nombre r est un *rayon polaire*, et le nombre θ, un *angle polaire* (associé au rayon r) du point M.

Le couple $[OM;(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})]$ forme des coordonnées polaires du point M.



Remarque 3. À la différence des coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires ne sont pas uniques : $[r\,;\theta] = [r\,;\theta+2\pi] = [-r\,;\pi+\theta] = \dots$.

Tous les réels sont des angles polaires du point O : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $[0\,;\theta]$ est couple de coordonnées polaires de O.

Remarque 4. On définit aussi les coordonnées polaires d'un vecteur $\vec{u}$, comme celles du point $M = O + \vec{u}$.

Remarque 5. Soit M de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$, de rayon polaire r et d'angle polaire θ. Alors

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \iff r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Exemple 1. ✎ Donner les coordonnées polaires de $M(-3\,;3)$ et les coordonnées cartésiennes de $N[2\,;\frac{5\pi}{6}]$.

2. Produit scalaire et déterminant

2.1 Produit scalaire

Proposition 5. Propriétés du produit scalaire

Le plan est muni d'une base orthonormée $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Soient $\vec{u};\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

① homogénéité : $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$.

② bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ et $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

③ symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

④ positivité : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$.

⑤ caractère défini : $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{o}$.

⑥ caractérisation de l'orthogonalité : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$

Démonstration. ✎ Revenir à la définition 3 □

Exemple 2. ✎ Démonter que les trois hauteurs d'un triangle non plat sont concourantes.

On pourra considérer le point d'intersection H des hauteurs issues de A et de B, et vérifier que H appartient aussi à la hauteur issue de C

Proposition 6. Formules du produit scalaire

Le plan est muni d'une base orthonormée $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. On a les égalités suivantes, qui définissent le nombre réel appelé *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = xx'+yy' = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

La deuxième égalité n'est valable que pour deux vecteurs non nuls. Le produit scalaire est parfois noté $\langle\vec{u}\,;\vec{v}\rangle$.

Démonstration. ✎ la première égalité vient de la définition 3.

La seconde s'obtient en utilisant la forme exponentielle des affixes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La troisième s'obtient en développant $(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\cdot(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})$ avec la proposition 5.

La dernière, en développant $\|\vec{u}+\vec{v}\| = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$. □

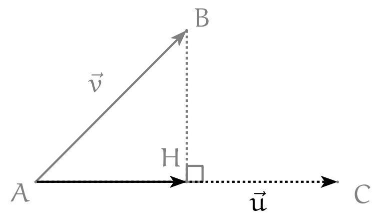
Remarque 6. ⚠ le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre, pas un vecteur !

Remarque 7. La distance entre deux points du plan A et B, de coordonnées respectives dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Proposition 7. Projeté orthogonal

Soient A, B et C trois points avec $A \neq B, C$. Le projeté orthogonal H de B sur (AC) vérifie :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$



Démonstration. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}$. □

Exemple 3. ✎ Calculer les coordonnées projeté orthogonal H de $M(3;4)$ sur la droite d'équation $y - x = 0$.

2.2 Déterminant

Proposition 8. Propriétés du déterminant

Le plan vectoriel est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

① homogénéité : $\det(\lambda\vec{u};\vec{v}) = \lambda \det(\vec{u};\vec{v}) = \det(\vec{u};\lambda\vec{v})$.

② bilinéarité : $\det(\vec{u}+\vec{v};\vec{w}) = \det(\vec{u};\vec{w}) + \det(\vec{v};\vec{w})$ et $\det(\vec{w};\vec{u}+\vec{v}) = \det(\vec{w};\vec{u}) + \det(\vec{w};\vec{v})$

③ antisymétrie : $\det(\vec{u};\vec{v}) = -\det(\vec{v};\vec{u})$

④ conséquence de l'antisymétrie $\det(\vec{u};\vec{u}) = 0$.

⑤ caractérisation de la colinéarité : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \,/\!/\, \vec{v}$.

Démonstration. ✎ Toujours revenir à la définition 3 ! □

Proposition 9. Formules du déterminant

Le plan est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\det(\vec{u};\vec{v}) = \mathfrak{Im}(\bar{z}z') = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = xy' - yx'$.
La deuxième égalité n'est valable que pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Le nombre $\det(\vec{u};\vec{v})$ est parfois appelé *produit mixte* et noté $[\vec{u};\vec{v}]$.

Démonstration. Même principe que pour le produit scalaire. □

Remarque 8. On note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Il s'agit d'un « produit en croix » qui permet de tester la proportionnalité de quatre nombre, en particulier des coordonnées de deux vecteurs :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La valeur du déterminant est la même dans toutes les bases orthonormées directes.

On verra dans le chapitre sur les déterminants que le déterminant calculé avec les coordonnées dans une base quelconque caractérise encore la colinéarité lorsqu'il est nul, mais que sa valeur sinon dépend de la base considérée.

Proposition 10 (Aires). Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire de $ABCD$ est $\mathcal{A}(ABCD) = \left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$.

Soit ABC un triangle. L'aire de ABC est $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$.

Les mêmes quantités sans valeurs absolues sont les *aires orientées* de ces polygones.

Démonstration. On utilise la formule de l'aire du triangle ABC en exprimant sa hauteur en avec un sinus. □

Exemple 4. ✎ Aire du triangle ABC, avec $A(-1;6)$, $B(4;5)$ et $C(-2;-2)$?

3. Droites du plan

3.1 Vocabulaire des droites

Définition 8. Vocabulaire lié à la notion de droite :

- ⋆ Une *droite vectorielle* est constituée de l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur $\vec{u}$ non nul. On la note $\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- ⋆ La *droite* affine $\mathcal{D}$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
- ⋆ des points qui appartiennent à une même droite sont dits *alignés*.
- ⋆ deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
- ⋆ un *vecteur normal* à une droite affine $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ est un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$.

Proposition 11.

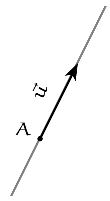
Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par le point A et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}$.

① $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$.

② si $A \in \mathcal{D}$ et $B \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$, $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

③ $M(x\,;y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$ (équations paramétriques de $\mathcal{D}$).

④ $M \in \mathcal{D} \iff \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right) = 0$: (équation cartésienne de $\mathcal{D}$)



Remarque 9. On vérifie que les droites $(A,\vec{u})$ et $(B,\vec{v})$ sont identiques si et seulement si le point B appartient à la droite $(A,\vec{u})$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque 10. Si $M \in (A,\vec{u})$, on note $\overline{AM}$ l'unique réel tel que $\overline{AM}\,\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. C'est la *mesure algébrique* du segment $[AM]$, elle dépend de $\vec{u}$. En revanche, si $B, C, D \in (A,\vec{u})$ avec $B \neq A$, le quotient $\overline{CD}/\overline{AB}$ ne dépend pas du vecteur $\vec{u}$.

Remarque 11. un vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ est normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Un calcul de produit scalaire et de déterminant montre que $\vec{u}$ est (directement) orthogonal à $\vec{v}$

3.2 Différentes descriptions d'une droite

Proposition 12.

Soient a, b, c réels avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tel que $ax + by + c = 0$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$.
On dit que $ax + by + c = 0$ est une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$.
Réciproquement, on obtient une équation cartésienne de cette forme de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ en écrivant $M(x\,;y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Démonstration. $ax + by + c = 0 \iff a\left(x + \frac{ca}{a^2+b^2}\right) + b\left(y + \frac{cb}{a^2+b^2}\right) = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff M$ appartient à la droite passant par $A(-\frac{ca}{a^2+b^2}\,;-\frac{cb}{a^2+b^2})$ et normale à $\vec{n}(a\,;b)$. □

Remarque 12. En coordonnées, la définition 8 se traduit par : la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;y_{\vec{u}})$ est l'ensemble des $M(x\,;y)$ tels que

$$\begin{cases} x = x_A + t\,x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\,y_{\vec{u}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un tel système est appelé *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 5. ✎ Former un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne des droites :

① (AB) où $A(1;2)$ et $B(-1;3)$

② $(A;\vec{u})$ où $\vec{u}(-2;3)$

③ $\mathcal{D}$ // (AB) passant par $O(0;0)$.

④ d'équation $2x+y+1=0$

⑤ paramétrée par $\begin{cases} x = t \\ y = t-2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3.3 Intersection de deux droites

MÉTHODE 1. intersection de deux droites

Deux droites se coupent en un point unique si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires. Dans le cas contraire, elles sont soit strictement parallèles, soit confondues.
Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système :

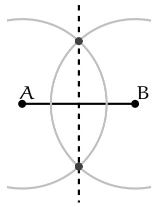
- ⋆ de deux équations à deux inconnues x, y si l'on dispose des équations cartésiennes des droites
- ⋆ de trois équations à trois inconnues x, y, t si l'on a une équation cartésienne d'une droite et un système paramétrique de l'autre. (c'est le cas le plus simple).
- ⋆ de quatre équations à quatre inconnues x, y, t, t' si l'on a deux systèmes paramétriques (le plus compliqué : il faut alors impérativement choisir deux paramètres t et t' distincts. Dans ce cas, mieux vaut chercher une équation cartésienne de l'une des droites d'abord)

EXEMPLE 6. ✎ chercher l'intersection des droites de l'exemple 5 : ① et ④ d'une part, ⑤ et ④ d'autre part.

3.4 Perpendicularité

DÉFINITION 9. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

EXEMPLE 7. ✎ On rappelle que la *médiatrice* d'un segment est la droite perpendiculaire au segment qui le coupe en son milieu.
On caractérise aussi la médiatrice d'un segment comme l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment : M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AM = BM$.
Trouver, de deux manières différentes, une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$, où $A(-1;2)$ et $B(3;4)$.



3.5 Distance d'un point à une droite

DÉFINITION 10. La distance d'un point M_0 a une droite $\mathcal{D}$ est le nombre noté $d(\mathcal{D}, M_0)$ égal à la distance de M_0 au projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$. C'est la plus petite distance du point M_0 à un point de la droite.

PROPOSITION 13. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

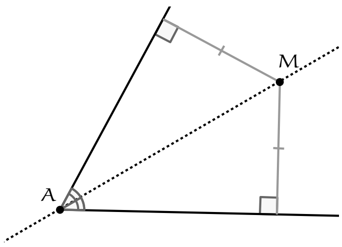
Soit $M_0(x_0;y_0)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$. On a : $\boxed{d(M_0,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$. Le vecteur normal à $\mathcal{D}$ $\vec{n}(a;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{HM_0}$ étant colinéaires, $|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}| = HM_0\,\|\vec{n}\|$, donc

$$d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_0-x_H)+(by_0-y_H)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0-ax_H-by_H-c+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

car $H \in \mathcal{D}$: $ax_H+by_H+c=0$. □

EXEMPLE 8. ✎ Distance de $M(1;2)$ à $\mathcal{D}\ :\ y = x+2$?



EXEMPLE 9. ✎ Les *bissectrices* de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les deux droites formées des points équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en A et dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, une bissectrice, dirigée par $\vec{w}$, des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passe par A et vérifie $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u}\,;\vec{w}})\ [2\pi]$.
Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices des droites d'équation $x+y=2$ et $x-y=4$.

4. Cercles

4.1 Équation de cercle

On obtient souvent une équation cartésienne d'un cercle par l'un des deux points de vue :

REMARQUE 13 (Cercle défini par son centre et son rayon). Le point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega)$ et de rayon r si et seulement si $\Omega M = r$, soit : $\Omega M^2 = r^2 \iff (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = r^2$.
Par exemple, $x^2+(y+1)^2 = 16$ est une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(0\,;-1)$ et de rayon 4.

REMARQUE 14 (Cercle défini par un diamètre). Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $A = M$ ou $B = M$ ou $(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui équivaut à : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

MÉTHODE 2. Reconnaître l'équation d'un cercle

Les cercles ont une équation cartésienne de la forme $x^2+ax+y^2+bx+c=0$. Pour reconnaître s'il s'agit d'un cercle et trouver alors son centre et son rayon, on met x^2+ax et y^2+by sous forme canonique :

- ⋆ on écrit $x^2+ax = x^2+2(\frac{a}{2})x$ et on reconnaît le début d'une identité remarquable.
- ⋆ on complète l'identité : $x^2+2(\frac{a}{2})x+(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a}{2}$.

On isole les termes constants et on obtient une équation de la forme $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = m$.

- ⋆ si $m>0$, on a l'équation d'un cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{m}$.
- ⋆ si $m=0$, on a l'équation du point A.
- ⋆ si $m<0$, on a l'équation de l'ensemble vide $\varnothing$.

EXEMPLE 10. Reconnaître : ① $x^2+4x+y^2=0$ ② $x^2+y^2+y+3=0$ ③ $4y = 2x^2+2y^2$ ④ $x^2+y^2+6y+9=0$

4.2 Intersections et cercles

REMARQUE 15 (Intersection droite-cercle). Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et rayon R, $\mathcal{D}$ une droite. On a l'alternative

- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) > R$: l'intersection est vide.
- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) = R$: la droite est tangente au cercle, un point commun.
- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) < R$: la droite coupe le cercle en deux points.

Démonstration. ✎ Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $\mathcal{D}$ une droite. Démontrer que leur intersection compte 2, 1, ou 0 points selon que la distance de la droite au centre du cercle est strictement inférieure, égale, ou strictement supérieure au rayon.

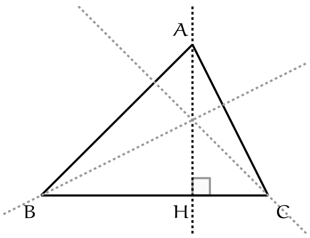
On pourra travailler dans un repère orthonormé dont l'origine est le centre de $\mathcal{C}$, l'unité est le rayon de $\mathcal{C}$, et considérer une équation normale de $\mathcal{D}$: $\cos(\theta)x+\sin(\theta)y+c=0$.

5. Rappels

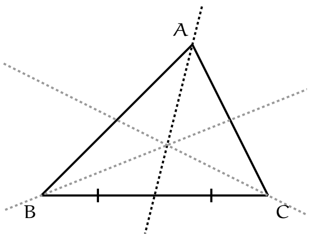
5.1 Triangles

DÉFINITION 11. Un *triangle* est défini par trois points deux à deux distincts A, B, C. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Un triangle ABC est dit

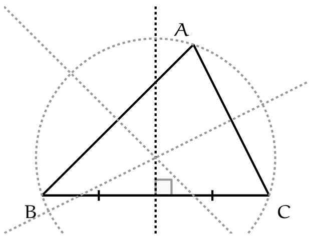
- ⋆ *rectangle* en $A \iff (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (le plus grand côté $[BC]$ est alors appelé *hypothénuse*)
- ⋆ *isocèle* en $A \iff AB = AC \iff \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *équilatéral* $\iff AB = AC = BC \iff \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *plat* $\iff$ A, B et C sont alignés.



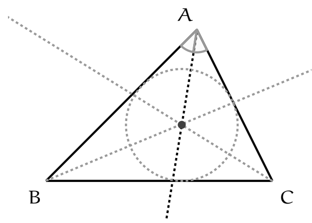
Hauteurs



Médianes



Médiatrices



Bissectrices

DÉFINITION 12. La *hauteur* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC). Le *pied de la hauteur* issue de A est le point H d'intersection de la hauteur issue de A avec (BC). (⚠ une hauteur peu sembler « en dehors » du triangle).

PROPOSITION 14. Les hauteurs d'un triangle sont *concourantes* (se coupent en un seul point). Leur point d'intersection est appelé l'*orthocentre* du triangle. Soit b la mesure d'un côté (base) et h est la distance du sommet opposé au pied de la hauteur issue de ce sommet (hauteur). L'aire du triangle est alors : $\mathcal{A} = \frac{b\times h}{2}$.

DÉFINITION 13. La *médiane* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et le milieu A' du côté opposé $[BC]$.

PROPOSITION 15. Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection G est appelé *centre de gravité* du triangle ABC. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

PROPOSITION 16. Les médiatrices des côtés d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC. Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

PROPOSITION 17. Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle inscrit* au triangle ABC (tangent aux côtés du triangle).

PROPOSITION 18. La somme des angles d'un triangle est π (modulo 2π)

PROPOSITION 19. Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si deux quelconques des quatre droites remarquables ci-dessus sont confondues.

PROPOSITION 20. Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $[BC]$ est le diamètre de son cercle circonscrit.

REMARQUE 16. Dans un triangle rectangle en A :

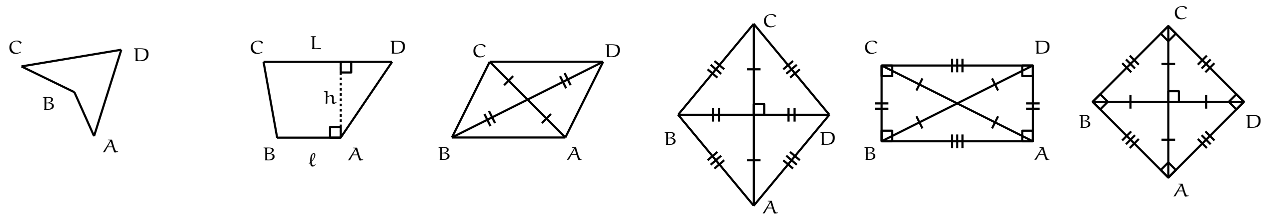
$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad \sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad \tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\cos(\widehat{B})}$$

5.2 Quadrilatères

DÉFINITION 14. Un *quadrilatère* $ABCD$ est défini par les quatre points A, B, C, D dans cet ordre. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Les *diagonales* du quadrilatère $ABCD$ sont les segments $[AC]$ et $[BD]$.

Ses *c*ôtés opposés sont d'une part $[AB]$ et $[CD]$, et d'autre part $[CD]$ et $[DA]$.



Quadrilatère | Trapèze | Parallélogramme | Losange | Rectangle | Carré

Remarque 17 (*Trapèzes*). Un quadrilatère est un trapèze lorsqu'il a deux côtés opposés parallèles. Dans un trapèze on note L et ℓ les longueurs des côtés parallèles et h la distance entre ces deux côtés. L'aire du trapèze est alors : $\mathcal{A} = \frac{L+\ell}{2}$.

Remarque 18 (*Parallélogrammes*). Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ou encore si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux. Si ℓ est la longueur d'un côté du parallélogramme et h la distance de ce côté à son côté opposé, l'aire du parallélogramme est $\mathcal{A} = h \times \ell$.

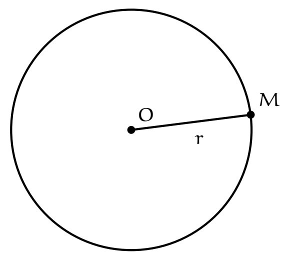
Remarque 19 (*Losanges*). Un quadrilatère est un losange si et seulement si tous ses côtés sont égaux, ou encore, si et seulement si c'est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de mêmes longueurs, ou enfin, si et seulement si ses diagonales se coupent perpendiculairement en leurs milieux.

Remarque 20 (*Rectangles*). Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si c'est un parallélogramme avec un angle droit, ou encore, si et seulement s'il a trois angles droits, ou enfin si et seulement si ses diagonales sont de mêmes longueurs et se coupent en leurs milieux.

Si ℓ est la largeur d'un rectangle et L sa longueur, l'aire du rectangle est $\mathcal{A}L \times \ell$.

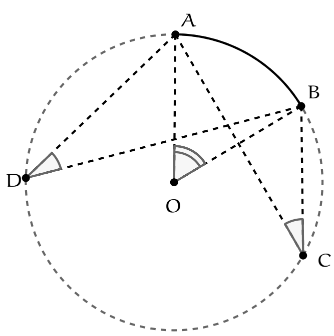
Un *carré* est un rectangle losange.

5.3 Cercles



Définition 15. Le *cercle* de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM = r$. Un *diamètre* du cercle est un segment dont les extrémités sont sur le cercle et dont le milieu est le centre du cercle.

Proposition 21. Le périmètre d'un cercle de rayon r est $p = 2\pi r$.
L'aire d'un *disque* (ensemble des M tel que $OM \leqslant r$) de rayon r est $\mathcal{A} = \pi r^2$.



Proposition 22 (Angle au centre). Soient A, B, C trois points distincts d'un cercle de centre O. Alors

$$\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$$

Proposition 23 (Angle inscrit). . Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un cercle. Alors

$$\widehat{(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})}\ [\pi]$$

Réciproquement, quatre points distincts vérifiant l'égalité précédente sont cocycliques (sur un même cercle) ou alignés.

Bilan du § 4

La géométrie plane au concours ATS

Si la géométrie n'est pas un thème privilégié des épreuves orales, chaque année depuis bientôt quinze ans l'épreuve écrite comporte un exercice d'étude de courbes qui se poursuit par l'étude de propriétés géométriques de la courbe. Cette étude repose sur l'utilisation de vecteurs tangents, de vecteurs normaux à des droites, la recherche d'intersections, le calcul de distances.

Le jury déplore chaque année le peu de candidats qui traitent ces questions pourtant simples. Maîtriser la géométrie est un atout significatif lors des épreuves écrites.

Prérequis

⋆ §3 section 6 : applications des complexes à la géométrie .... ☐

⋆ §2 section 12 : les formules trigonométriques (surtout les propositions 36 à 39) .... ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître la notion de produit scalaire (proposition 5) .... ☐
  (a) savoir refaire les exercices 5 et 6 .... ☐

② Connaître la notion de déterminant (proposition 9) .... ☐
  (a) connaître les applications aux aires (proposition 10, exercice 11) .... ☐

③ Connaître la notion de droite : sections 3.2, 3.5 .... ☐
  (a) connaître les équations de droites cartésienne : proposition 12 ; .... ☐
  (b) connaître les systèmes paramétriques : définition 12 ; .... ☐
  (c) savoir refaire l'exercice 3 .... ☐
  (d) connaître la distance point–droite (proposition 13 .... ☐

④ Connaître les représentations d'un cercle : section 4 .... ☐
  (a) savoir refaire l'exercice 4 .... ☐

Objectifs secondaires

① savoir travailler en coordonnées polaires (section 1.4) .... ☐

② Traiter un problème affine (ni angle, ni distance) dans un repère adapté : remarque 8 .... ☐
  (a) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐

Approfondissement

① Comprendre la notion de mesure algébrique d'un segment (remarque 10) .... ☐

TD DU § 4

Exercice 1. Théorème de Ménélaus
Soient A, B et C trois points du plan non alignés.

Soient $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (CA) \setminus \{C, A\}$ et $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$.

Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

La mesure algébrique $\overline{AB}$ est l'abscisse de B sur une droite passant par A et B et munie d'un repère $(O\,;\vec{u})$.

Exercice 2. Culturel : géométrie du triangle
Soient A, B et C trois points.

On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, p le demi périmètre du triangle ABC et s sa surface.

① Montrer la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$. (utiliser le produit scalaire)

② Démontrer (qu'à des conditions que l'on précisera) $\sin^2(A) = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2c^2}$.

③ Montrer que $s = \dfrac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$. Énoncer des formules analogues.

④ Démontrer la formule des sinus (à des conditions que l'on précisera) : $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\hat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\hat{C})} = \dfrac{abc}{2s}$.

⑤ Démontrer la formule de Héron : $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 3. Droites, équations cartésiennes, système d'équations paramétriques
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite

① passant par $A(1\,;3)$ et dirigée par $\vec{u}(8\,;1)$.
② passant par les points $B(4\,;-1)$ et $C(0\,;-2)$.
③ passant par $D(-1\,;3)$ et orthogonale à $\vec{n}(1\,;1)$.
④ passant par $G(0\,;4)$ et parallèle à (EF) où $E(-1\,;3)$ et $F(2\,;-2)$.
⑤ passant par $G(0\,;4)$ et perpendiculaire à (EF) où $E(-1\,;3)$ et $F(2\,;-2)$.
⑥ dont un système paramétrique d'équations est $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
⑦ bissectrice (il y en a deux) des droites $\mathcal{D} : y = 4$ et $\mathcal{D}' : -4x + 3y + 4 = 0$.
⑧ médiatrice de $[AB]$ avec $A(3\,;-2)$ et $B(5\,;4)$.

Exercice 4. Équations de cercles
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Trouver une équation cartésienne et les éléments caractéristiques

① du cercle circonscrit au triangle ABC où $A(2\,;7)$, $B(6\,;-1)$ et $C(-3\,;2)$.
② du cercle de centre $\Omega(-1\,;2)$ et de rayon 4.
③ cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0\,;1)$ et $B(2\,;3)$.

Exercice 5. Cercle circonscrit à un triangle
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC, où $A(0\,;1)$, $B(2\,;3)$ et $C(-4\,;-12)$.

Exercice 6. Cercle inscrit d'un triangle
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les caractéristiques du cercle inscrit dans le triangle ABC, où $A(8\,;-7)$, $B(-4\,;2)$ et $C(-4\,;9)$.

Exercice 7. Construction d'une parabole
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;1)$.

On note $M(t\,;0)$ un point de l'axe des abscisses ($t \in \mathbb{R}$) et H l'orthocentre du triangle BAM.

Déterminer une équation du lieu $\mathcal{L}$ parcouru par H lorsque M décrit l'axe des abscisses. Reconnaître $\mathcal{L}$.

Exercice 8. Intersections de courbes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Reconnaître les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

① $\mathcal{C} : x^2+y^2-4x+2y-4=0$ et $\mathcal{D} : x+3y-2=0$.
② $\mathcal{D} : 5x-2y=7$ et $\mathcal{D}' : -7x+3y-1=0$
③ $\mathcal{D} : 9x-6y+1=0$ et $\mathcal{D}' : -6x+4y-8=0$.
④ $\mathcal{C} : x^2+y^2-6x+2y+6=0$ et $\mathcal{C}' : x^2+y^2-4x+4y-2=0$

Exercice 9. Tangentes à un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les tangentes au cercle de centre $A(-2\,;1)$ et de rayon 5 qui passent par $B(5\,;2)$.

Exercice 10. Orthocentre et sommet d'un triangle défini par trois droites

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

La droite (AB) a pour équation $x-2y+3=0$, la droite $(AC) : 2x-y-3=0$ et $(BC) : x+2y+1=0$.

Déterminer les coordonnées des sommets et de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 11. Autour d'un parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;0)$ et $C(3\,;3)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Calculer l'aire du parallélogramme et en déduire la distance de C à la droite (AB).

Exercice 12. Droites remarquables d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient $A(1\,;1)$, $B(3\,;7)$ et $C(-1\,;3)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 13. Inverser géométriquement un réel

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère $M(t\,;0)$, où $t>1$.

① Montrer que l'abscisse a d'un point de contact $P(a\,;b)$ de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par M vérifie $a=1/t$.
② Soit M un point d'abscisse $t>1$ sur une droite graduée.
Décrire une construction géométrique de N d'abscisse $1/t$.
③ Soit N un point d'abscisse $0<t<1$ sur une droite graduée.
Décrire une construction géométrique de M d'abscisse $1/t$.

Exercice 14. Construction d'une parabole par foyer et directrice

Soient $\mathcal{D}$ une droite et F un point du plan tels que $F \notin \mathcal{D}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé tel que $F(0\,;\frac{1}{4})$ et $\mathcal{D} : y=-\frac{1}{4}$.

On cherche l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et F.

① Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ équidistants de F et $\mathcal{D}$.
② Soient un réel a et les points d'abscisse a : N_a et M_a respectivement situés sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P} : y=x^2$.
Montrer que la tangente T_a en M_a à $\mathcal{P}$ est la médiatrice du segment $[FN_a]$.
③ Expliquer comment construire à la règle et au compas, à partir de $\mathcal{D}$, de F et d'un point N de $\mathcal{D}$ le point de $\mathcal{P}$ dont le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ est N.