§ 3 : Nombres complexes

1. Définition des nombres complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1. Un *nombre complexe* z est un couple $(x\,;y)$ de nombres réels, que l'on note $z = x + iy$.

- ⋆ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- ⋆ La *forme algébrique* d'un nombre complexe z est $z = x + iy$, avec x et y réels.
- ⋆ Le nombre réel x est la *partie réelle* du nombre complexe z. On écrit $x = \mathfrak{Re}(z)$.
- ⋆ Le nombre réel y est la *partie imaginaire* du nombre complexe z. On écrit $y = \mathfrak{Im}(z)$.
- ⋆ Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.
- ⋆ Lorsque $\mathfrak{Re}(z) = 0$, on dit que z est un nombre *imaginaire pur*.
- ⋆ On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.
- ⋆ Lorsque $\mathfrak{Im}(z) = 0$, on considère que z est un nombre réel.

⚠ la partie imaginaire d'un nombre complexe est réelle ! Par exemple, $\mathfrak{Im}(3 - 4i) = -4$.

1.2 Structure de corps de $\mathbb{C}$

On munit $\mathbb{C}$ de deux *lois de compositions internes* (c'est-à-dire, de deux « opérations ») $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$:

- ⋆ $\forall(x + iy\,;x' + iy') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ [x + iy] +_{\mathbb{C}} [x' + iy'] = (x +_{\mathbb{R}} x') + i(y +_{\mathbb{R}} y')$,
- ⋆ $\forall(x + iy\,;x' + iy') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ [x + iy] \times_{\mathbb{C}} [x' + iy'] = (x \times_{\mathbb{R}} x' -_{\mathbb{R}} y \times_{\mathbb{R}} y') + i(x \times_{\mathbb{R}} y' +_{\mathbb{R}} y \times_{\mathbb{R}} x')$,

où $+_{\mathbb{R}}$, $-\mathbb{R}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ désignent l'addition, la soustraction et la multiplication des nombres réels.

Remarque 1. L'injection $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}\ ;\ x \mapsto x + i0$ permet de considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, ce que l'on fera en notant simplement $x + i0 = x$. On remarque que les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ coïncident alors avec les opérations $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ des nombres réels : $\forall(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

- ⋆ $x +_{\mathbb{C}} x' = [x + i0] +_{\mathbb{C}} [x' + i0] = (x +_{\mathbb{R}} x') + (0 +_{\mathbb{R}} 0) = x +_{\mathbb{R}} x'$
- ⋆ $x \times_{\mathbb{C}} x' = [x + i0] \times_{\mathbb{C}} [x' + i0] = [x \times_{\mathbb{R}} x' -_{\mathbb{R}} 0 \times_{\mathbb{R}} 0] + i[x \times_{\mathbb{R}} 0 + 0 \times_{\mathbb{R}} x'] = x \times_{\mathbb{R}} x' + i0 = x \times_{\mathbb{R}} x'$

On s'autorise à alléger les notations précédentes et à n'écrire désormais que $+$ et $\times$, qu'il s'agisse d'opérations réelles ou complexes. De même, on écrira simplement $0 + i1 = i$.

Proposition 1. $\boxed{i^2 = -1.}$

Démonstration. On a par définition : $i^2 = (0^2 - 1 \times 1) + (0 \times 1 + 1 \times 0) = -1$. □

La proposition suivante assure que l'on peut mener les calculs dans les complexes de la même manière que dans les réels, en tenant compte de $i^2 = -1$:

Proposition 2. Muni de ses deux opérations, $\mathbb{C}$ a une structure de *corps commutatif*. Cela signifie que pour tous les nombres complexes z (de forme algébrique $z = x + iy$), z' et z'' on a :

① $+$ associative : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$

② 0 neutre de $+$: $0 + z = z + 0 = z$.

③ $+$ commutative : $z + z' = z' + z$

④ opposé : $z + (-x - iy) = 0$.

⑤ $\times$ associative $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$

⑥ 1 neutre de $\times$: $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$.

⑦ $\times$ commutative : $z \cdot z' = z' \cdot z$

⑧ inverse $(z \neq 0)$: $z \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1$.

⑨ $\times$ est distributive par rapport à $+$:
$z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent en appliquant d'abord la définition des opérations dans $\mathbb{C}$ (section 1.2) à l'un des membres de l'égalité, en utilisant ensuite les propriétés des nombres réels et en appliquant à nouveau la définition des opérations.

Par exemple ⑦ : $z \cdot z' \overset{\text{def}}{=\!=} (xx' - yy') + i(xy' + yx') \xlongequal{\times,+\text{ commutatifs dans}\mathbb{R}} (x'x - y'y) + i(x'y + y'x) \overset{\text{def}}{=\!=} z' \cdot z$ □

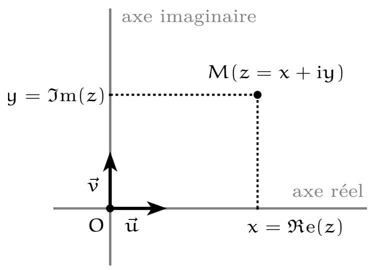
EXEMPLE 1. ✎ Mettre sous forme algébrique : ① $(2+i)(1-i)$ ② $(1+i)^2$ ③ i^{2015} ④ $(3-2i)(3+2i)$

REMARQUE 2. ⚠ Si $z, z' \in \mathbb{C}$, l'écriture $z > z'$ n'a, en général, *aucune signification* !

Contrairement au corps des réels, le corps des complexe ne peut-être muni d'une *bonne relation d'ordre*, qui à la fois permette de comparer tous les nombres et en même temps soit compatible avec les opérations : si une telle relation existait, elle respecterait la règle des signes, rendant impossible la relation $i^2 = -1$.

1.3 Représentations géométriques

Par construction, on identifie l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des points du plan à $\mathbb{C}$, de même que l'ensemble des vecteurs du plan.



DÉFINITION 2. À tout point $M(x\,;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Le point M est dit d'*affixe* z, ce que l'on note : $M(z)$.
Le point M est appelé l'*image* du nombre complexe z.
De même, à tout vecteur du plan $\vec{w}(x\,;y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Le vecteur $\vec{w}$ est alors dit d'affixe z, ce que l'on note : $\vec{w}(z)$.

REMARQUE 3. Les formules qui portent sur les coordonnées se transposent facilement en terme d'affixes. Par exemple, si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

- ⋆ Étant donnés les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- ⋆ Étant donnés les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$, le milieu du segment $[AB]$ est le point d'affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- ⋆ L'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme des affixes.
- ⋆ L'affixe de $\lambda \cdot \vec{w}$ est $\lambda\, z$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}$ a pour affixe z.

Au titre des applications à la géométrie, on verra deux formules essentielles :

- ⋆ la formule de la distance : $AB = |z_B - z_B|$ (section 6.1)
- ⋆ la formule de la mesure d'un angle orienté : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi]$ (section 6.2)

2. Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 3. Le *conjugué* du nombre complexe z, de forme algébrique $z = x + iy$, est $\bar{z} = x - iy$.

PROPOSITION 3.

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

① $z\bar{z} = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2 \in \mathbb{R}^+$	④ $\bar{\bar{z}} = z$	⑦ $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$ avec $z' \neq 0$
② $\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$	⑤ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	
③ $\Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$	⑥ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$	

Démonstration. ♡ ✎ Ces propriétés se prouvent en trois étapes : on part d'un côté, sous forme algébrique, on applique la définition du conjugué, on transforme l'écriture jusqu'à obtenir le second membre recherché.

Par exemple : ① : $z\bar{z} \overset{\text{def}}{=\!=} (x + iy)(x - iy) = x^2 - (-y^2) + iyx - ixy = x^2 + y^2 = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2$. □

2.2 Application : forme algébrique d'un quotient

MÉTHODE 1. Mettre un quotient sous forme algébrique

Pour mettre le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la *quantité conjuguée* du dénominateur :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \quad \frac{z'}{z} = \frac{1}{\underbrace{z\bar{z}}_{\text{réel d'après la propriété 3, ①}}} \times z'\bar{z}$$

Par exemple : $\dfrac{i}{1+2i} = \dfrac{i \times (1-2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i.$

EXEMPLE 2. ✎ Déterminer la forme algébrique de : ① $\dfrac{1+i}{1-i}$ ② $\dfrac{1}{i}$ ③ la solution z de l'équation $iz+1=3z$

3. Forme exponentielle d'un nombre complexe

3.1 Module

DÉFINITION 4. Le *module* d'un nombre complexe z est le réel positif $\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\Re\mathrm{e}(z)^2 + \Im\mathrm{m}(z)^2}}$

REMARQUE 4. Le module d'un nombre réel coïncide avec sa valeur absolue, d'où la notation.

PROPOSITION 4. MODULE

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

① $|zz'| = |z|\,|z'|$

② si $z \neq 0$, $|z'/z| = |z'|/|z|$

③ Inégalité triangulaire : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

④ $|-z| = |z|$

⑤ $|\bar{z}| = |z|$

et $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z+z'|$

Démonstration. ✎ On utilise la définition 4 du module et la propriété 3 du conjugué.

Par exemple, ① : $|zz'|^2 \overset{\text{def 4}}{=\!=} zz'\overline{zz'} \overset{\text{prp 3,⑥}}{=\!=} zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z}z'\bar{z}' \overset{\text{def 4}}{=\!=} |z|^2|z'|^2.$ □

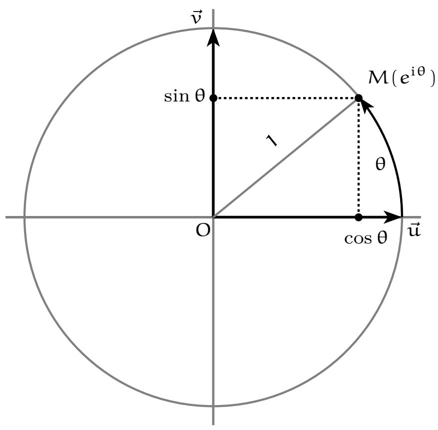
EXEMPLE 3. ✎ Calculer le module des nombres complexes suivants :

① -3 ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $\dfrac{13+5i}{13-5i}$ ⑤ $(7-2i)^4$ ⑥ $(4+3i)(12-5i)$

3.2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Soit $\theta \geqslant 0$, on rappelle que le cosinus (respectivement le sinus) d'un nombre réel θ est l'abscisse (respectivement l'ordonnée) du point du cercle trigonométrique obtenu en parcourant une distance θ sur le cercle à partir du point $(1;0)$ dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre). Lorsque $\theta < 0$, le point est obtenu en parcourant une distance $-\theta$ dans le sens inverse trigonométrique.

NOTATION 1. Le groupe [(1)] des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$



L'ensemble des points du plan dont l'affixe est dans $\mathbb{U}$, est, en vertu de la proposition 13, ②, le cercle de centre O et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique.*

(1). $\mathbb{U}$ a une structure de *groupe* au sens où $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et inverse et contient l'unité 1.

3.3 Exponentielle complexe

DÉFINITION 5. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$

REMARQUE 5. Cette notation analogue à l'exponentielle réelle est légitimée de deux façons. D'une part $t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$ vérifie l'équation différentielle $y' = iy$ et pour $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ax}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. D'autre part, ϕ vérifie la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle. On verra une justification plus satisfaisante encore de cette notation lors du chapitre sur les séries entières.

PROPOSITION 5.

Pour tous nombres réels θ et θ', on a :

① $e^{i0} = 1$
② $|e^{i\theta}| = 1$
③ $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta = \theta'$ $[2\pi]$
④ $\forall z \in \mathbb{U},\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$
⑤ $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = 1/e^{i\theta}$
⑥ $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
⑦ $e^{i\theta}/e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$
⑧ $\forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Démonstration. Les points ③, ④, ⑤, ⑥ et ⑦ sont des conséquences des formules trigonométriques de symétrie et d'addition (section 12 du chapitre §1).

⑧ : ♡ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrons par récurrence la propriété « $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

⋆ Initialisation : $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i\times 0\times\theta}$. La propriété est donc vrai au rang $n = 0$.

⋆ Transmission : on fait l'hypothèse que la propriété vraie au rang n : « $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$ ». On va démontrer qu'elle est alors vraie au rang $n+1$: « $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$ »

$(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n \times e^{i\theta} \overset{\text{Hyp}}{=\!=} e^{in\theta}e^{i\theta} \overset{⑥}{=\!=} e^{in\theta+i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

⋆ Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang suivant. Par le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On passe à la propriété pour $n \in \mathbb{Z}$ en utilisant le point ⑤. □

REMARQUE 6. On peut étendre la définition de l'exponentielle à $\mathbb{C}$, en posant, pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$. L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto e^z$ est surjective mais pas injective. Elle vérifie les mêmes propriétés algébriques que l'exponentielle réelle, et $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = \mathfrak{Im}(z)$ $[2\pi]$.

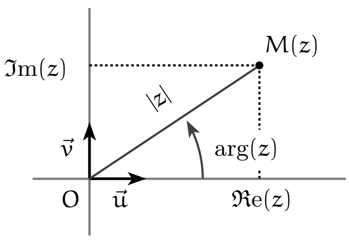
3.4 Définition de l'argument d'un nombre complexe

Tout réel strictement positif admet un unique antécédent par l'application exponentielle, ce qui permet de définition une application réciproque, le logarithme. On a cependant montré (propriété 5, ③) que les antécédents d'un nombre complexe de module 1 par la fonction exponentielle diffèrent d'un multiple entier de 2π. Cela va nous permettre de définir une application réciproque, l'argument, modulo 2π :

DÉFINITION 6. On appelle *argument* d'un nombre complexe non nul z tout nombre θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

L'argument n'est pas unique, mais défini à un multiple entier de 2π près : on note $\arg(z) = \theta$ $[2\pi]$. Le nombre 0 n'a pas d'argument.



DÉFINITION 7. Ainsi, tout complexe z non nul s'écrit sous la forme suivante, dite *forme exponentielle* :

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\ [2\pi]}$$

MÉTHODE 2. Mise sous forme exponentielle

Pour mettre un nombre complexe sous forme exponentielle, on calcule son module, puis on le factorise par son module, et on reconnaît le cosinus et le sinus d'un de ses arguments.
Par exemple : $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

EXEMPLE 4. ✎ Donner la forme algébrique et la forme exponentielle des nombres suivants :

① $e^{i\pi}$ ② $-i$ ③ $-3e^{i\frac{\pi}{4}}$ ④ $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ⑤ $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^4$ ⑥ $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2015}$

Les propriétés algébriques de l'argument sont comparables à celles du logarithme :

PROPOSITION 6. PROPRIÉTÉS DES ARGUMENTS

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

① $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

② $\arg(1/z) = -\arg(z)\ [2\pi]$

③ $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

④ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

⑤ $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

⑥ $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ ssi $z \in \mathbb{R}_+^*$

⑦ $\arg(z) = 0\ [\pi]$ ssi $z \in \mathbb{R}^*$

⑧ $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $z \in i\mathbb{R}^*$

Démonstration. ✎ Découle des proposition 5 sur l'exponentielle, combinée à la définition 6 de l'argument. □

4. Racines complexes

4.1 Racines n-ième d'un nombre complexe

MÉTHODE 3. Identifier modules et argument

Pour résoudre certaines équations, la recherche de la forme exponentielle est préférable à la forme algébrique. On utilisera alors le fait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument à un multiple entier de 2π près.

DÉFINITION 8. Soit n un entier naturel non nul et α un nombre complexe non nul. Les *racines n-ièmes* de z sont les solutions de l'équation d'inconnue z : $z^n = \alpha$.

PROPOSITION 7. RACINES N–IÈMES

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe $re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes distinctes :

$$z^n = re^{i\theta} \iff z \in \left\{ r^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} : k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$$

En particulier, les racines n-ièmes de l'unité (de 1) sont données par :

$$\boxed{z^n = 1 \iff z \in \mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}}$$

Démonstration. ♡ On montre que l'équation $z^n = re^{i\theta}$ équivaut à $Z^n = 1$ où $Z = z\, r^{-\frac{1}{n}}\, e^{-i\frac{\theta}{n}}$.

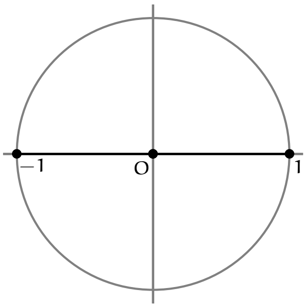
$$Z^n = 1 \text{ ssi } \begin{cases} |Z^n| = 1 \\ \arg(Z^n) = 0\ [2\pi] \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} |Z|^n = 1 \\ n\arg(Z) = 0\ [2\pi] \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) = 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Par 2π-périodicité de $\theta \mapsto e^{i\theta}$, deux solutions sont égales : $e^{\frac{2ik_1\pi}{n}} = e^{\frac{2ik_2\pi}{n}}$ si et seulement si $e^{\frac{2i(k_1-k_2)\pi}{n}} = 1$, ce qui signifie que $k_1 - k_2$ est un multiple de n.

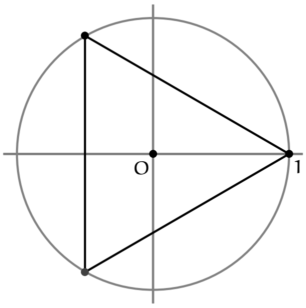
Il y a donc n solutions distinctes, par exemple obtenues pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

À partir de $z = Z\, r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$, on trouve les racines n-ièmes de $re^{i\theta}$. □

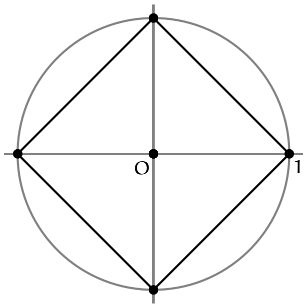
Remarque 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ contient 1, est stable par multiplication et par inverse : il est muni d'une structure de groupe. Sa représentation dans le plan complexe est un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



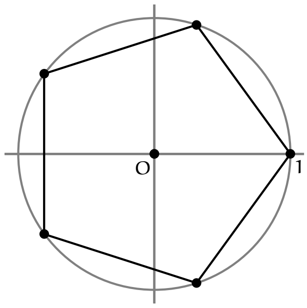
Représentation de $\mathbb{U}_2$



Représentation de $\mathbb{U}_3$



Représentation de $\mathbb{U}_4$



Représentation de $\mathbb{U}_5$

Notation 2. On note souvent $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, de sorte que $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$.

Proposition 8. Soit $\omega \neq 1$ une racine n-ième de l'unité. Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Démonstration. ♡ On utilise une somme de référence : $\omega \neq 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \overset{\text{def 8}}{=\!=} \frac{0}{1-\omega} = 0$ □

4.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Méthode 4. Résolution algébrique de $z^2 = a + ib$

Pour déterminer algébriquement les solutions z de $z^2 = a + ib$,

① on écrit $z = x + iy$, et on calcule son carré. Il vient $x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$: on obtient un système de deux équations en considérant les parties réelles et imaginaires.

② On ajoute au système l'équation du module : $|z|^2 = |a + ib|$ soit : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela permet de trouver x^2 et y^2 (demi-somme et demi-différence de l'équation du module et de la partie réelle).

③ L'équation « partie imaginaire » permet de trouver les deux couples solutions parmi les quatre possibles.

Exemple 5. On cherche les racines carrées de $3-4i$ sous la forme $z = x+iy$. On a : $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

$z^2 = 3 + 4i \iff x^2 - y^2 + 2xy\,i = 3 - 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= -4 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 - y^2 &= 3 \\ xy &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 &= 4 \\ y^2 &= 1 \\ xy &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \pm 2 \\ y &= \pm 1 \\ xy &= -2 \end{cases} \iff z = \pm(2 - i)$

On a éliminé $z = \pm(2 + i)$ avec la condition : $xy = -2 < 0$. (x et y de signes contraires)

Exemple 6. ✎ Calculer les racines carrées de : ① i ② -4 ③ $1 + 3i$

Proposition 9 (Équation du second degré). Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Les *racines* de $az^2 + bz + c$ sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ où } \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

En particulier, si Δ (le *discriminant*) est nul, $z_1 = z_2$: on parle de racine double.

Si a, b, c sont réels et $\Delta > 0$, les racines sont réelles (et $\delta = \sqrt{\Delta}$).

Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées : $z_1 = \bar{z}_2$ (et $\delta = i\sqrt{\Delta}$).

Démonstration. ✎ On prouve : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = a(z - z_1)(z - z_2)$ □

Exemple 7. Résoudre ① : $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$ ② : $z^2 - iz - 1 + i = 0$

5. Application des complexes à la trigonométrie

5.1 Liens entre complexes et trigonométrie

Les applications des nombres complexes à la trigonométrie sont des conséquences des trois résultats suivants :

Proposition 10. pour tout nombre réel θ, on a : ① $\cos(\theta) = \Re e(e^{i\theta})$ ② $\sin(\theta) = \Im m(e^{i\theta})$

Proposition 11. Formules d'Euler

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Démonstration. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en vertu de la propriété 3, ② et ③, on a :

$$\cos(\theta) = \Re e(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \Im m(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$ □

Remarque 8. Une expression trigonométrique est dite *linéaire* lorsqu'elle s'écrit comme somme de multiples de cosinus et de sinus.

Exemples d'expressions linéaires : $\cos(a+b)$; $1 + \sin(2a) + \cos(3a)$; $4\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(3x)$.

Exemples d'expressions non linéaires : $\sin^2(x)$, $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos^4(x) - 2\cos(4x)$.

La propriété 10 et le théorème 11 permettent d'effectuer deux opérations réciproques : l'« antilinéarisation » et la linéarisation :

antilinéarisation (propriété 10) : $\cos(a+b) = \Re e(e^{i(a+b)})$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

linéarisation (théorème 11) : $\cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \ldots$

Proposition 12. Formule de Moivre

$\forall (\theta, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$, $\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

Démonstration. Le résultat vient du théorème 5, ⑧ et la définition 5 de l'exponentielle. □

5.2 Linéarisation

On linéarise souvent les expressions trigonométriques afin d'effectuer des calculs d'intégrales.

Méthode 5. Linéariser un polynôme trigonométrique

① écrire l'expression à linéariser en termes d'exponentielles complexes (formules d'Euler, théorème 11).

② développer (formules du binôme) et simplifier (propriétés algébriques des exponentielles).

③ appliquer à nouveau les formules d'Euler pour obtenir l'expression linéarisée.

Par exemple on retrouve : $\cos(x)^2 = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^{ix}e^{-ix}}{4} = \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}$

Exemple 8. ✎ Retrouver la formule de linéarisation $\cos(a)^2 = \ldots$.

Exemple 9. ✎ Linéariser $\sin^3(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,dx$

5.3 Antilinéarisation

On « antilinéarise » une expression pour la factoriser, ou pour l'écrire comme un polynôme en sinus et cosinus.

Méthode 6. Antilinéarisation

Lorsqu'on cherche à transformer une expression linéarisée, on utilise au contraire la propriété 10. C'est la cas pour obtenir un polynômes en cos et sin, ou certaines factorisations de sommes.

Exemple 10. ✎ Retrouver $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

Il ne s'agit toutefois pas d'une démonstration de la formule d'addition dans la mesure où celle-ci a été utilisée pour obtenir les propriétés de l'exponentielle …

Les formules de Moivre du théorème 12 sont liées au développement de certaines formules trigonométriques.

Exemple 11. ✎ Écrire $\cos(4x)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos(x)$.

Méthode 7. Méthode de l'angle moitié

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta}\pm e^{i\theta'}$, on pensera à mettre en facteur $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ et à utiliser les formules d'Euler du théorème 11.
Cette méthode s'applique aussi aux cas où $\theta'=0$ et $\frac{\pi}{2}$ qui correspondent respectivement à $e^{i\theta}\pm 1$ et $e^{i\theta}\pm i$.
Par exemple : $e^{i\theta}+1=e^{i\theta}+e^{0i}=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})$.

Exemple 12. ✎ Calculer pour x réel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

6. Applications des complexes à la géométrie

6.1 Application géométrique des modules : distances

Définition 9. Si A et B sont des points d'affixes respectives z_A et z_B alors $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|}$

Proposition 13. Ainsi :

① Si $\vec{w}$ est un vecteur d'affixe z, alors $\|\vec{w}\|=|z|$. ② Si M est un point d'affixe z, alors $OM=|z|$.

Exemple 13. ✎ Soit A le point d'affixe 1. On considère la transformation du plan qui à tout point $M\neq A$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z'=\frac{z+1}{z-1}.$$

Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne :

① au cercle de centre O et de rayon 1 ; ② à l'axe des imaginaires purs ; ③ à l'axe des réels.

Méthode 8. Problème géométrique lié à la notion de distance

Pour traiter un problème géométrique où la notion de distance intervient, on traduit les distances en modules, via la définition 9.
⚠ ne pas oublier les modules, ou l'égalité n'a plus aucun sens !

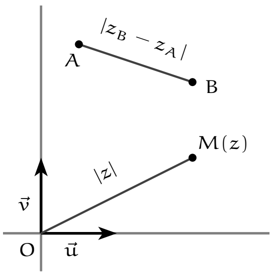
Exemple 14. Problèmes liés à la notion de distance.

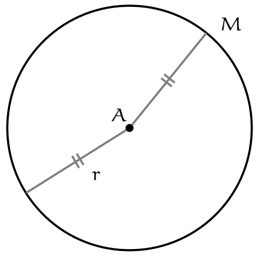
Les points M, A et B ont pour affixes respectives z, z_A et z_B.

① MAB est rectangle en M si et seulement si $AB^2=AM^2+BM^2$ ssi $|z_B-z_A|^2=|z-z_A|^2+|z-z_B|^2$ (théorème de Pythagore).

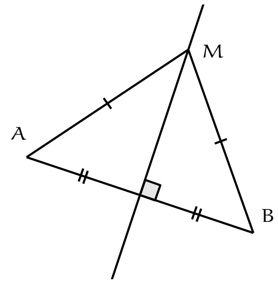
② Le point M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si $AM=r$ ssi $|z-z_A|=r$.

③ Le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $AM=BM$ ssi $|z-z_A|=|z-z_B|$.





Ex. 14, ② $|z - z_A| = r$



Ex. 14, ③ : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

6.2 Application géométrique des arguments : angles

DÉFINITION 10. La *mesure de l'angle orienté* de deux vecteurs est $\boxed{(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]}$

PROPOSITION 14.

Si $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$,

① Si $\vec{w}$ est un vecteur d'affixe z, alors $(\vec{u}\,;\vec{w}) = \arg(z)\ [2\pi]$.

② $(AB)\ //\ (CD)$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

③ $(AB) \perp (CD)$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration. Le point ① est une reformulation de la définition 6 d'un argument.

Le point ② (respectivement ③) combine la définition 10 à la propriété 6, ⑦ (respectivement ⑧) □

MÉTHODE 9. Problèmes liés à la notion d'angle

Pour traiter un problème lié aux angles, à l'orthogonalité, au parallélisme ou à l'alignement, on traduit les angles en termes d'arguments en utilisant la définition 10.

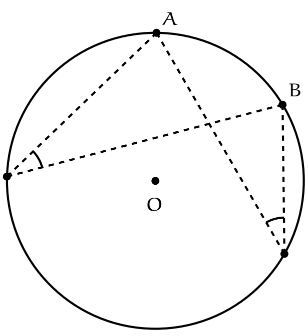
EXEMPLE 15. Exemples de problèmes où intervient la notion d'angle :

① Quatre points $A, B, C \neq A, B$ et $D \neq A, B$ sont cocycliques ou alignés ssi $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DB})\ [\pi]$. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \alpha\ [\pi]$, où $\alpha \neq 0\ [\pi]$, est donc un cercle passant par $A(z_A)$ et $B(z_B)$ privé de ces deux points.

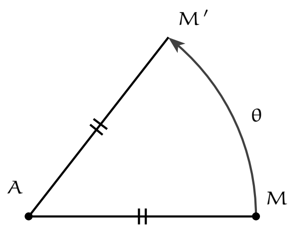
② $M' \neq A$ est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si : $AM = AM'$ et $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}) = \theta\ [2\pi] \iff \dfrac{z' - z_A}{z - z_A} = e^{i\theta}$.

③ M appartient à la demi droite $[AB)$ $\iff \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}_+$.

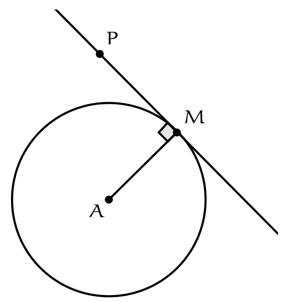
④ P appartient à la tangente au cercle de centre A et de rayon AM si et seulement si : $(AM) \perp (MP)$.



Exemple 15, ①



Exemple 15, ②



Exemple 15, ④

6.3 Barycentres

DÉFINITION 11. Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plans d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels de somme non nulle. Le *barycentre* du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ est le point

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\} \text{ d'affixe } z_G = \frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k$$

REMARQUE 9. Lorsque tous les poids sont identiques, on parle d'*isobarycentre*. L'isobarycentre des points A et B est le milieu du segment $[AB]$, celui des points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC. Les affixes correspondantes s'obtiennent par un calcul de moyenne.

6.4 Produit scalaire et déterminant de deux vecteurs

DÉFINITION 12. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = xx' + yy'$.

Le *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \Im\mathrm{m}(\bar{z}z') = xy' - yx'$.

PROPOSITION 15. Soient u et v deux vecteurs d'affixes respectives z et z'. On a :

① $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \Im\mathrm{m}(\bar{z}z') = 0$.

② $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = 0$.

Démonstration. On applique les critères ③ et ② des propriétés 14 au quotient z'/z, et on étudie à part le cas où le numérateur ou le dénominateur est nul. □

REMARQUE 10. On peut aussi tester l'orthogonalité et la colinéarité avec les critères ③ et ② des propriétés 14, l'avantage de la propriété 15, est qu'elle ne nécessite pas de raisonner par disjonction des cas pour traiter à part le cas où les vecteurs sont nuls.

EXEMPLE 16. ✎ Ensemble des $M(z)$ tels que $A(1), M(z)$ et $M'(z^2)$ forment un triangle rectangle en M ?

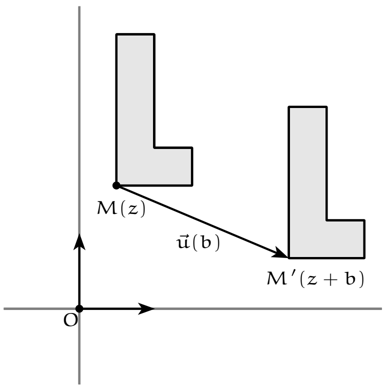
6.5 Interprétation géométrique de la somme : translations

DÉFINITION 13. La *translation* de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

PROPOSITION 16.

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe complexe b. L'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' d'affixe $z' = z + b$.

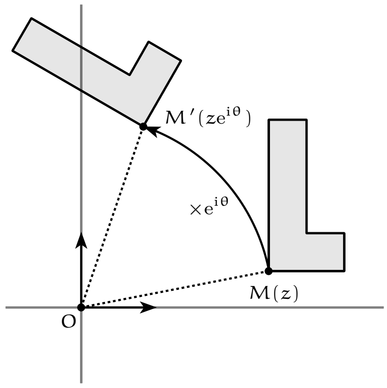
Démonstration. $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ ssi $b = z' - z$ ssi $z' = z + b$ □



REMARQUE 11. La translation préserve les distances et les angles. Elle n'admet pas de point invariant.

6.6 Interprétation géométrique du produit : rotations et homothéties

DÉFINITION 14. La *rotation* de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est la transformation qui a tout point M du plan associe le point M' tel que $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta\ [2\pi]$ si $M \neq A$ et $M' = A$ si $M = A$.



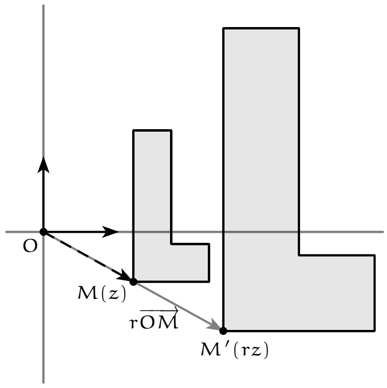
PROPOSITION 17.

Soit A un point du plan d'affixe a et $\theta \in \mathbb{R}$. L'image du point M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle θ est le point M' d'affixe z' telle que $z' - a = e^{i\theta}(z - a)$.
En particulier, si le centre est $A = O$: $z' = e^{i\theta} z$.

Démonstration. Si $A = M$, alors $z' - a = e^{i\theta} \cdot 0 = 0$ donc $z' = a$: on retrouve $M' = A$. Sinon, $AM = AM'$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta\ [2\pi]$ ssi $\left|\frac{z'-a}{z-a}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z'-a}{z-a}\right) = \theta\ [2\pi]$ ssi $\frac{z'-a}{z-a} = e^{i\theta}$ □

REMARQUE 12. La rotation préserve les distances et les angles. C'est une transformation qui admet un point invariant unique : le centre de la rotation.

DÉFINITION 15. L'*homothétie* de centre A et de rapport $r \in \mathbb{R}^*$ est la transformation qui a tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AM}$



PROPOSITION 18.

Soit A un point du plan d'affixe a et $r \in \mathbb{R}^*$. L'image du point M d'affixe z par l'homothétie de centre A et de rapport r est le point M' d'affixe z' telle que $z' - a = r(z - a)$.
En particulier, si le centre est $A = O$: $z' = rz$.

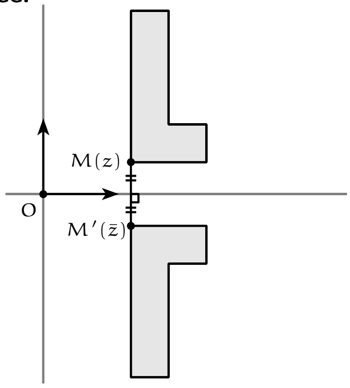
REMARQUE 13. Les homothéties préservent les angles, mais multiplient les distance par la valeur absolue du rapport. Elles admettent un unique point fixe : le centre de l'homothétie.

REMARQUE 14. La multiplication d'un nombre complexe z par un nombre complexe ω donne l'affixe de l'image de $M(z)$ par la composée commutative de la rotation de centre O et d'angle $\arg(z)$ et l'homothétie de centre O et de rapport $|z|$.

REMARQUE 15. L'homothétie de centre A et de rapport -1 coïncide avec la rotation de centre A et d'angle π et la symétrie de centre A.

6.7 Interprétation géométrique du conjugué : symétrie par rapport à l'axe réel

DÉFINITION 16. La *symétrie d'axe* la droite $\mathcal{D}$ est la transformation qui a tout point $M \notin \mathcal{D}$ du plan associe le point M' tel que $\mathcal{D}$ soit la médiatrice du segment $[MM']$, et qui préserve $\mathcal{D}$.



PROPOSITION 19.

L'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des réels est le point M' d'affixe z' telle que $z' = \bar{z}$.

REMARQUE 16. Les symétries axiales préservent les distances, mais renversent l'orientation, c'est-à-dire, transforment un angle orienté en son opposé. L'ensemble des points fixes d'une symétrie axiale est son axe de symétrie.

Bilan du § 3

Les nombres complexes interviennent souvent à l'oral du concours et les rapports de Jury vont tous dans le même sens : ils sont mal maîtrisés. Voici par exemple le rapport 2013 :

« Les candidats sont assez mal à l'aise avec les nombres complexes, et en particulier avec les racines de l'unité. Les exercices utilisant l'interprétation géométrique des complexes sont rarement bien compris. »

Les exercices font souvent référence aux racines de n-ièmes (section 4), et, c'est lié, à la forme exponentielle des nombres complexes (section 3).

Pour réussir les exercices de géométrie complexe, il faut maîtriser les premières sous-sections de la section 6.

Enfin, la trigonométrie (section 12 du §2) doit être apprise. La connaissance des formules discrimine beaucoup les candidats. L'apprentissage de ces formules est donc un objectif prioritaire, que tout étudiant peu réaliser.

Objectifs prioritaires

① connaître la notion de conjugué (définition 3 et proposition 3) .... ☐
  (a) savoir mettre un quotient sous forme algébrique (méthode 1) .... ☐
  (b) savoir refaire l'exemple 2 et l'exercice 1 .... ☐
② connaître la notion de module (définitions 4 et 9) et proposition 4
  (a) savoir refaire l'exemple 3 et l'exercice 3 .... ☐
③ connaître la notion d'exponentielle complexe (définition 5 et proposition 5) .... ☐
  (a) savoir mettre un nombre sous forme exponentielle (méthode 2) .... ☐
  (b) savoir refaire l'exemple 4 et les exercices 4 et 2 .... ☐
④ connaître la notion d'argument (définition 6 et proposition 6 et définition 10) .... ☐
⑤ savoir résoudre une équation de degré 2 (proposition 9 et exemple 7 .... ☐
⑥ racines n-ièmes d'un nombre complexe et leur somme (proposition 7 et 8, exercices associés) .... ☐
⑦ savoir faire le lien entre trigonométrie et complexes (propositions 10 et 11) .... ☐

Objectifs secondaires

① savoir linéariser une expression trigonométrique (méthode 5) .... ☐
② savoir l'appliquer au calcul intégral : exemple 9 et exercice 12 .... ☐
③ savoir « antilinéariser » une expression trigonométrique (méthode 6 et exemple 11) .... ☐
④ connaître la méthode 7 de l'angle moitié (et exemple 12) .... ☐
⑤ connaître les formules de Moivre. .... ☐
⑥ savoir reconnaître l'alignement et la colinéarité : proposition 15, exercices 15, 14 et 16 .... ☐

Approfondissement

① connaître les translations, homothéties et rotations (paragraphes 6.5 et 6.6) .... ☐
② savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe (méthode 4, exemples 5 et 6) .... ☐
③ connaître le lien entre barycentres (paragraphe 6.3) et nombres complexes .... ☐

TD § 3

Module et argument

Exercice 1. Forme algébrique

Donner la forme algébrique du nombres complexe : ① $\dfrac{3+i}{1-i}$ ② $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$ ③ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ④ $e^{2\pi}$ ⑤ $\dfrac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 2. Forme exponentielle

Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
① $\sqrt{3}-i$ ② $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ ③ $-5+5i$ ④ $-\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{1-i}$ ⑥ $-5\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$ ⑦ $(-1+i)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Identité du parallélogramme

Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Interpréter cette égalité géométriquement.

Exercice 4. Simplification dans $\mathbb{C}$

Calculer : $\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2} + \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

Exercice 5. Angle remarquable

Soient $z' = 1+i$ et $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Écrire $\dfrac{z'}{z}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 6. Puissances et puissances du conjugué

ATS 2013

Trouver tous les nombres complexes z tels que z^7 et z^{-2} soient conjugués.

Racines n-ièmes

Exercice 7. Équation et racines n-ièmes

ATS 2008

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $27(z+1)^6 + (z-1)^6 = 0$.

Exercice 8. Équation et racines n-ièmes

BTS-DUT 2011

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$. En déduire les solutions de $(z-1)^n = (z+1)^n$.

Exercice 9. Équation complexe

ATS 2010

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\dfrac{1}{z^2} + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 10. Racines cubiques de $-i$

ATS 2014

Calculer les racines cubiques de $-i$.

Exercice 11. Racines carrée d'un nombre complexe

ATS 2009

Déterminer les racines carrées du nombre complexe : $-7+5i$.

Trigonométrie

Exercice 12. Linéarisation et intégrales

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\sin(5x)\,dx$.

Exercice 13. Somme trigonométrique

ATS 2009

Calculer : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(\theta p)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Géométrie

Exercice 14. Alignement de trois points paramétrés

Soit M un point du plan complexe, d'affixe z.

Déterminer l'ensemble des points M tel que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 15. Projection du plan sur un cercle

Soit A le point d'affixe 1 du plan complexe. On considère la transformation p du plan qui à tout point M, d'affixe z et distinct de A, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

① Déterminer l'ensemble des antécédents de A par la transformation p.
② Calculer le module de z'.
③ Démontrer que les points A, M et M' sont alignés.
④ En déduire une construction du point M'.

Exercice 16. Droite d'Euler

On va montrer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés.

Soit ABC un triangle. On choisit un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ tel que O soit le centre du cercle circonscrit à ABC. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

On note G le centre de gravité de ABC, et g l'affixe de G. Le point H a pour affixe $a+b+c$.

① Déterminer l'affixe de G.
② Démontrer que $|a| = |b| = |c|$.
③ Montrer que $\dfrac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur. Interpréter.
④ Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
⑤ Montrer que O, G et H sont alignés.

Exercice 17. Ensembles de points

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

① $|z-i| = 1$ ② $|z+1+i| < 2$ ③ $|z+i| = |z-1|$ ④ $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ⑤ $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Exercice 18. Polygones réguliers inscrits dans un cercle

Soit un entier $n \geqslant 3$. Pour tout entier $k \in \{0;\dots;n\}$, on définit le point M_k d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

① Montrer que, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $M_kM_{k+1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
② En déduire le périmètre du polygone $M_0M_1\dots M_n$.
③ Calculer la limite du périmètre lorsque n tend vers $+\infty$. (indication : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$)

Exercice 19. Image d'un cercle par une fonction trinôme

Soit f l'application du plan dans lui même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $Z = z^2+1$.

① Déterminer les antécédents du point O.
② Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
③ Que dire des images par f de deux points symétriques par rapport à O ? De deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
④ Soit N un point d'affixe $e^{i\theta}$, où $\theta \in [0\,;2\pi[$. Montrer que N' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
⑤ Montrer que $\overrightarrow{ON'} = 2\cos(\theta)\ \overrightarrow{ON}$. Qu'en déduire pour O, N et N' ?
⑥ Expliquer la construction de N'.

Exercice 20. Théorème de l'angle au centre

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1, tels que $a \neq c$ et $b \neq c$.

Montrer que : $2\arg\dfrac{c-b}{c-a} = \arg\dfrac{b}{a}\ [2\pi]$. Interpréter géométriquement ce résultat.