§ 2 : Fonctions usuelles

1. Introduction

> « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes »
> Johann Bernoulli (1667-1748

La notion de fonction apparaît aux dix-septième siècle, avec Descartes d'abord, qui la limite aux fractions rationnelles, puis Leibniz et Bernoulli qui lui donnent une acceptation proche de ce qu'elle est aujourd'hui, mais peu rigoureuse.

Les notions de dérivabilité et de continuité n'acquièrent leur rigueur actuelle qu'à la fin du dix-neuvième siècle, lorsque Weierstrass propose sa construction des nombres réels.

En attendant, d'illustres mathématiciens commettent des erreurs : Gauss (1777-1855) croyait que toute fonction était développable en série entière, Cauchy (1789-1857) pensait que toute fonction continue était dérivable.

Au début du dix-neuvième siècle, des mathématiciens commencent à exhiber des monstres : des fonctions discontinues en tout réel, ou continue partout mais dérivable nulle part, ces création contribueront à amener la définition de fonction vers sa forme rigoureuse actuelle (voir le §1 Logique).

La notion de fonction intervient dans toutes les disciplines scientifiques, pour décrire des grandeurs qui dépendent d'autres grandeurs (position en fonction du temps, etc.) Ce chapitre a donc plusieurs objectifs :

- ⋆ proposer une construction des fonctions usuelles et démontrer leurs propriétés.
- ⋆ apprendre à représenter l'allure d'une courbe (comportement local ou à l'infini d'une fonction)
- ⋆ utiliser des fonctions pour résoudre des inéquations, des équations.

Un exemple de problème :

Problème 1. Combien de solutions admet l'équation $\dfrac{\ln(x)}{x} = m$ en fonction des valeurs de m ?

2. Propriétés de symétrie des courbes

2.1 Définition et lecture graphique

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

> Définition 1. La *courbe* d'une fonction f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan défini par $\mathcal{C}_f = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$.
>
> L'équation $y = f(x)$ est une *équation cartésienne* de la *courbe* de f.

Remarque 1. ⚠ on ne confondra pas la fonction f, sa courbe $\mathcal{C}_f$ et le nombre $f(x)$ qui sont trois objets de nature différente !

Exemple 1. Lecture graphique d'image et d'antécédents.

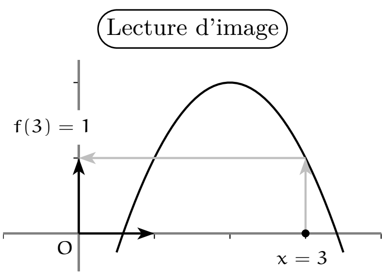
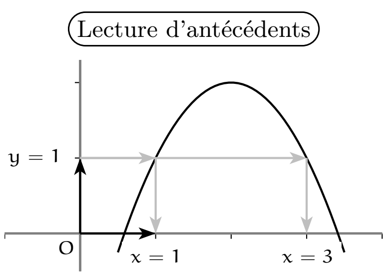
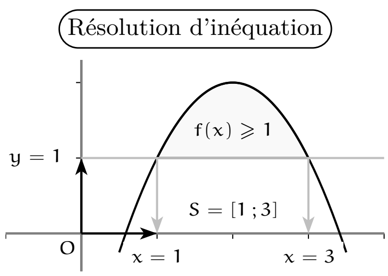


image de 3 par f : $f(3) = 1$.



antécédents de 1 par f : 1 et 3.

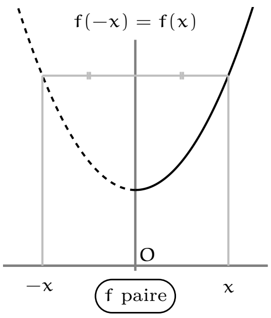


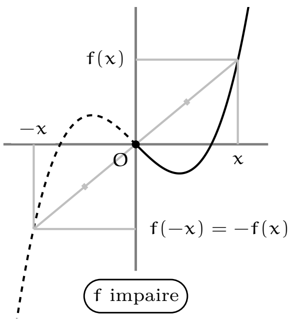
$[1, 3]$ ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 1$.

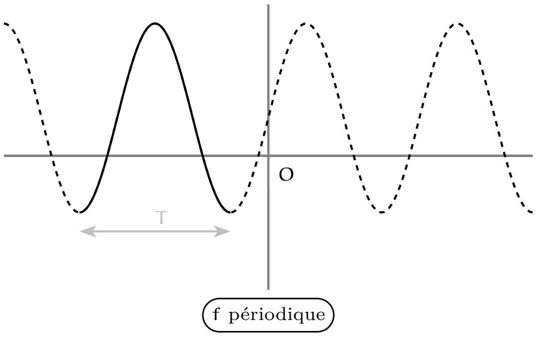
2.2 Parité et périodicité

L'étude des propriétés d'une fonction permet de restreindre son ensemble d'étude et de compléter sa courbe par translation ou symétrie.

Définition 2. Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est
- ⋆ *paire* si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
- ⋆ *impaire* si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$.
- ⋆ T-*périodique* (avec $T > 0$) si et seulement si : (a) $\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D}$ (b) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x+T) = f(x)$.







Exemple 2. ✎ Vérifier que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est impaire.
Sachant que cos est 2π–périodique, quelle est la période de $f : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ où $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$?

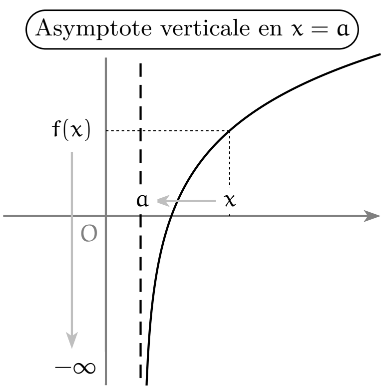
Proposition 1. Soit f définie sur $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.
① f est paire si et seulement si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
② f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine.
③ f est T-périodique si et seulement si $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(T\,;0)$.

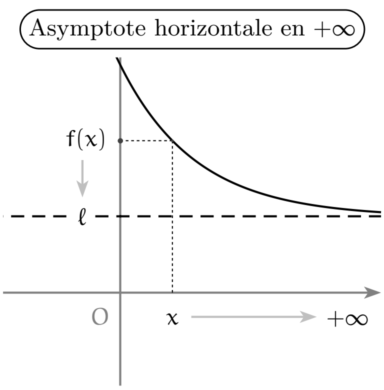
Démonstration. ✎ Prouver ②. On commencera par exprimer les coordonnées du symétrique M' d'un point $M(x\,;y)$ par rapport à O. □

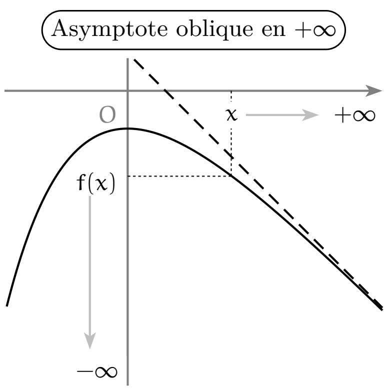
2.3 Asymptotes

Intuitivement, une *asymptote* à la courbe de f au voisinage d'une borne ouverte de son ensemble de définition, est une droite épouse au mieux l'allure de la courbe dans cette direction. Elle permet d'en guider le tracé.

Définition 3. La courbe d'une fonction f admet
- ⋆ une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ ssi $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
- ⋆ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell\ (\in \mathbb{R})$
- ⋆ une *asymptote oblique* d'équation $y = ax+b$ en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b\ \in \mathbb{R}$.







2.4 Tangentes

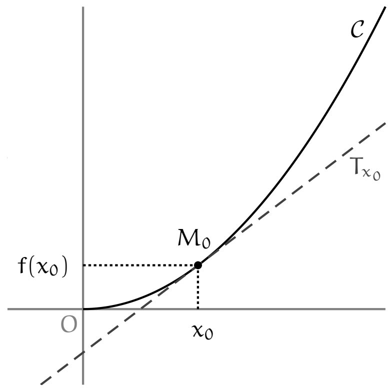
La dérivation sera étudiée au chapitre §11. Intuitivement, la tangente en un point M de la courbe $\mathcal{C}$ est la droite qui épouse au mieux l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage de M. Elle permet de guider le tracé de $\mathcal{C}$ près de M.

DÉFINITION 4. Le *nombre dérivé* $f'(x)$ d'une fonction f définie sur un intervalle I est la limite, lorsqu'elle existe, du taux d'accroissement de f en $x_0 \in I$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ noté aussi $\dfrac{df(x)}{dx}$.

DÉFINITION 5. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ainsi, le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(x_0)$.



EXEMPLE 3. ✎ Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = x^2$ au point $A(1,1)$?

REMARQUE 2. Si la limite du taux d'accroissement en $a^{\pm}$) est $\pm\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en a une tangente verticale d'équation $x = a$.

EXEMPLE 4. ✎ Montrer que $\mathcal{C} : y = \sqrt{x}$ a une tangente verticale en O.

3. Dérivation

3.1 Opérations et dérivation

On montrera lors du chapitre §11 sur les limites :

PROPOSITION 2.

Soient I et J deux intervalles, et u et v deux fonctions. Si

① $k \in \mathbb{R}$ et u est dérivable sur I, alors ku aussi et $(ku)' = ku'$

② u et v sont dérivables sur I, alors $u + v$ aussi et $(u+v)' = u' + v'$

③ u et v sont dérivables sur I, alors uv aussi et $(uv)' = u'v + v'u$

④ u et v sont dérivables sur I, et v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

⑤ $u : I \to J$ dérivable et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$.

EXEMPLE 5. ✎ Dériver les fonctions suivantes :

① $x \mapsto \dfrac{x+1}{3}$ ② $x \mapsto \tan(x)$ ③ $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ où $(\omega, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ ④ $x \mapsto \sin(x^2)$ ⑤ $x \mapsto x\ln(x)$

3.2 Application aux variations

On admet (en attendant le chapitre §11) le théorème suivant :

THÉORÈME 3.

Soit f une fonction définie et continue sur un *intervalle* I. Si

- ⋆ f' est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur I.
- ⋆ $f' > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
- ⋆ $f' < 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

REMARQUE 3. Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x.

Exemple 6. ✎ Dresser le tableau de variations complet et justifié de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Donner l'allure de la courbe. Apporter des éléments de réponse au problème 1 ?

4. Notion de continuité

4.1 Définition

La notion de limite utilisée ci-dessous sera précisée lors du chapitre §11 sur les limites.

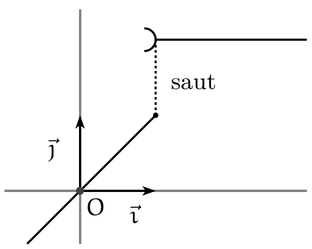
> Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue* en a si et seulement si :
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
> La fonction f est dite continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

Remarque 4. Cette définition traduit l'idée que la courbe de f n'admet pas de « saut », qu'elle peut être représentée sans lever le crayon. Cette remarque n'a rien de rigoureux et ne doit bien sûr pas être mentionnée dans la rédaction de la solution d'un problème !

Remarque 5. Des propriétés de calcul des limites, on déduit que la somme, la différence, le produit, le quotient de fonction continues sont continues. En conséquence, les fonctions usuelles sont continues sur leurs intervalles de définition. Par exemple, la continuité des constantes et l'identité $x \mapsto x$ implique celle des polynômes et des fractions rationnelles.

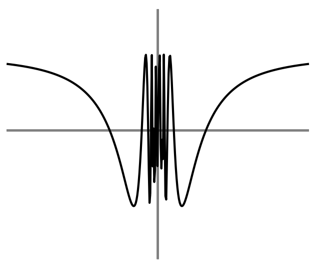
Exemple 7. Trois exemples de discontinuités :

① discontinuité par « saut »



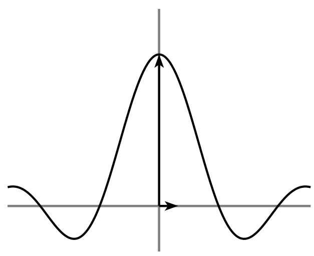
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty\,;1] \\ 2 & \text{si } x \in]1\,;+\infty[\end{cases}$$

② : discontinuité « sauvage »



$$g(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

③ : discontinuité « artificielle »



$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

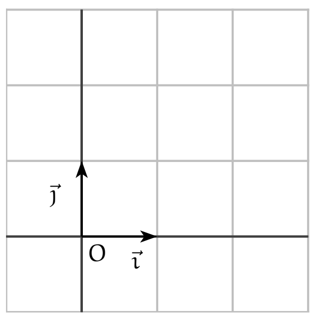
① $f(1) = 1$ mais $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ donc f n'est pas continue en 1.

② $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et cos n'a pas de limite en $+\infty$ donc g n'a pas de limite en 0 : g n'est pas continue en 0.

③ n'étant pas définie en 0, h n'est pas continue en 0. Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, donc en définissant $\tilde{h}$ par $\tilde{h} = h$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\tilde{h}(0) = 1$, on obtient une fonction qui prolonge h par continuité.

4.2 Une fonction avec des discontinuités : la partie entière

> Définition 7. La partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.



Exemple 8. Courbe et quelques valeurs :

① Calculer $\lfloor 6 \rfloor$, $\lfloor 9{,}7 \rfloor$, $\lfloor 5/3 \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor e \rfloor$, $\lfloor -1{,}2 \rfloor$ et $\left\lfloor -\sqrt{8} \right\rfloor$.

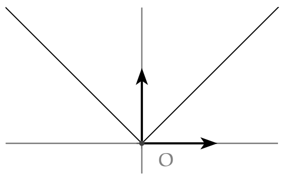
② Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est–elle continue sur $[n\,;n+1[$? En n ?

③ Résoudre $\lfloor x \rfloor = x$ puis $\lfloor x/2 \rfloor = x/2$.

④ La fonction $v : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue ?

4.3 Une fonction continue mais non dérivable en 0 : la valeur absolue

DÉFINITION 8. La *valeur absolue* d'un réel x est le nombre $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



REMARQUE 6. Pour deux réels a et b, le nombre $|a-b|$ s'interprète comme la distance entre a et b. On verra davantage de propriétés de la valeur absolue en étudiant le module d'un nombre complexe, qui en est une généralisation.

La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$

4.4 Théorème des valeurs intermédiaires

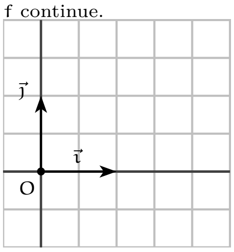
Le théorème ci-dessous permet de démontrer l'existence de solutions à une équation (sans trouver ces solutions). Il permet de répondre à des questions du type « Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution sur l'intervalle I ». On le démontrera dans le §8 Suites.

THÉORÈME 4. « DES VALEURS INTERMÉDIAIRES »

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Si f et continue sur I et k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet *au moins* une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

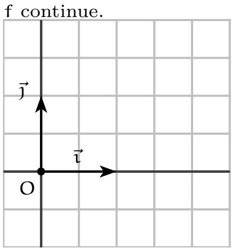
EXEMPLE 9. Soit $f : [0\,;2] \to \mathbb{R}$. On considère l'équation $f(x) = 0$. Les deux premières figures sont dans le cadre du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), au contraire des trois autres.

Hypothèses du TVI
$f(0) = -1\,;f(2) = 1$
f continue.



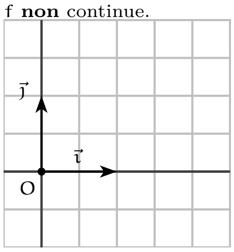
(1) 1 solution

Hypothèses du TVI
$f(0) = -1\,;f(2) = 1$
f continue.



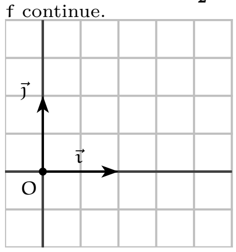
(2) 3 solutions

Hors TVI
$f(0) = -1\,;f(2) = 1$
f **non** continue.



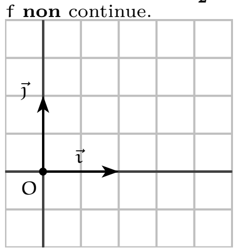
(3) 0 solution

Hors TVI
$f(0) = -1\,;f(2) = -\frac{1}{2}$
f continue.



(4) 0 solution

Hors TVI
$f(0) = -1\,;f(2) = -\frac{1}{2}$
f **non** continue.



(5) 1 solution

La figure **(2)** montre qu'il peut y exister plus d'une solution, les figures **(3)** et **(4)** illustrent l'intérêt de chacune des hypothèses alors que la figure **(5)** montre que le théorème n'a pas de réciproque : il peut exister une solution unique alors qu'aucune des hypothèses n'est satisfaite.

EXEMPLE 10. ✎ Montrer que $\tan(x) = 1{,}5$ admet au moins une solution.

COROLLAIRE 5 (du théorème des valeurs intermédiaires). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a, b \in$ I. Si :

- ⋆ f et continue sur l'*intervalle* I,
- ⋆ f est strictement monotone sur I, (strictement croissante ou bien strictement décroissante)
- ⋆ et k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** dans l'intervalle $[a\,;b]$.

La fonction f réalise alors une bijection [(1)] strictement monotone de l'intervalle $[a\,;b]$ vers $[f(a)\,;f(b)]$

REMARQUE 7. Dans ces théorèmes, on peut remplacer l'intervalle $[a\,;b]$ par un intervalle ouvert ou semi-ouvert (par exemple $]2\,;+\infty[$) quitte à remplacer $f(a)$ et $f(b)$ par des limites (par exemple $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$)

EXEMPLE 11. ✎ Terminer la résolution du problème 1

(1). voir la définition 7 du §1 « Langage mathématique »

4.5 Application aux inégalités et recherches de signes

Une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires est que si une fonction continue change de signe sur un intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle.

MÉTHODE 1. Étude du signe d'une fonction compliquée

Lorsqu'on cherche le signe d'une fonction f dont on ne sait pas dresser le tableau de signes, on peut :

① étudier les variations de cette fonction f. (éventuellement en dérivant)

② chercher des solutions à $f(x) = 0$ et les reporter dans le tableau de variations.

③ en déduire le tableau de signes de f.

REMARQUE 8. La méthode précédente est importante. Elle peut s'appliquer :

- ⋆ lorsqu'on cherche le domaine de définition d'une fonction f avec un logarithme, ou une racine carrée.
- ⋆ lorsqu'on recherche le signe d'une dérivée.
- ⋆ lorsqu'on recherche la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. (on étudie le signe de $h = f - g$. La courbe de f est au dessus de celle de g lorsque $h > 0$).
- ⋆ lorsqu'on cherche à prouver une inégalité : $f \geqslant g \iff f - g \geqslant 0$: il suffit d'étudier le signe de $f - g$ et de trouver qu'il est positif.

Dans le cas des inégalités plus simples, on peut factoriser et obtenir directement le tableau de signes.

EXEMPLE 12. ✎ Montrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $\ln(x+1) \leqslant x$

4.6 Application aux fonctions réciproques

PROPOSITION 6.

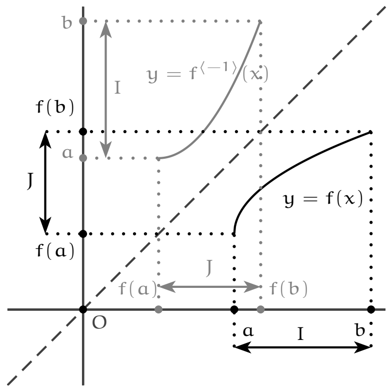
Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone [(2)] sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
La fonction f établit une bijection de $I = [a\,;b]$ sur $J = [f(a)\,;f(b)]$.
Sa fonction réciproque $f^{\langle -1\rangle} : J \to I$ vérifie :

① $\forall x \in I,\ f^{\langle -1\rangle} \circ f(x) = x$ et $\forall y \in J,\ f \circ f^{\langle -1\rangle}(y) = y$.

② $f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J.

③ $f^{\langle -1\rangle}$ est strictement monotone, de même monotonie que f.

④ $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable sur $J \setminus \{f(x),\ \text{où } x \in I \text{ et } f'(x) = 0\}$.



REMARQUE 9. Comme pour le corollaire 5, ce résultat s'applique encore avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, quitte à remplacer $f(a)$ ou $f(b)$ par des limites.

$$\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & J \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \\ x = g(y) & \longleftarrow & y \end{array}$$

REMARQUE 10. $\mathcal{C}_{f^{\langle -1\rangle}}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie d'axe $y = x$: en effet, $M(x, f(x))$ a un symétrique de la forme $M'(f(x), x)$ donc $M'(X, g(X))$ en posant $X = f(x)$.

MÉTHODE 2. Dériver une fonction réciproque

Pour déterminer la dérivée de de la fonction réciproque d'une bijection continue f d'un intervalle I sur un intervalle J, on dérive la fonction $h : J \to J,\ x \mapsto f \circ f^{\langle -1\rangle}(x) = x$ de deux manières différentes.

EXEMPLE 13. ✎ La fonction carrée $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle définit une bijection croissante de $[0;+\infty[$ vers $[0\,;\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[= [0\,;+\infty[$.

On appelle racine carrée et on note $\sqrt{\ }$ sa bijection réciproque. Calculer la dérivée de la fonction racine.

4.7 Existence de primitives

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'un primitive vérifiant une condition initiale d'une fonction continue sur un intervalle. Il sera démontré au chapitre §13 « Intégration ».

(2). une fonction *monotone* est soit croissante, soit décroissante.

Théorème 7. Existence de primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et y_0 un nombre réel. Il existe une unique fonction F définie et dérivable sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$ et $F' = f$, définie par :

$$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

La fonction F est la *primitive* de f qui vaut y_0 en x_0.

Exemple 14. La fonction inverse $]0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ est continue sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, elle admet donc sur cet intervalle une unique primitive qui s'annule en $x = 1$. On appellera *logarithme néperien* cette primitive.

5. Fonctions rationnelles

5.1 Rappel sur les puissances

Définition 9. $\forall (a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* : a^0 = 1,\ a^1 = a$, et $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. Si $a \neq 0$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Dans l'écriture a^n, n est l'*exposant*.

Proposition 8. Opérations avec un même nombre élevé à différentes puissances :

① $a^n a^m = a^{n+m}$ ② $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ③ $(a^n)^m = a^{nm}$ ④ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ⑤ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

⚠ Si $a, b \neq 0$ et $n \geqslant 2$, $(a + b)^n \neq a^n + b^n$. On a en revanche les identités remarquables :

Proposition 9 (Identités remarquables). Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n,

① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

② $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

③ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

④ $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

5.2 Fonctions polynomiales

Définition 10. Les fonctions *constantes* sont de la forme $x \mapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$ fixé.

La fonction *identité* est la fonction $x \mapsto x$.

Les fonctions *monômes* sont des puissances entières de l'identité : $x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions *polynomiales* sont les fonctions obtenues à partir des constantes et de l'identité et un nombre fini d'addition et de multiplications.

Elles s'écrivent $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Le plus grand exposant n des différents monômes est le *degré* du polynôme.

Proposition 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u la fonction monôme $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$.

① u est continue et indéfiniment dérivable ; $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = nx^{n-1}$ si $n > 0$ et $1' = 0$.

② si n est pair, u est une fonction paire, et si n est impair, u est une fonction impaire.

③ si n est paire, u est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, si n impaire, u est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

④ Variations et signe :

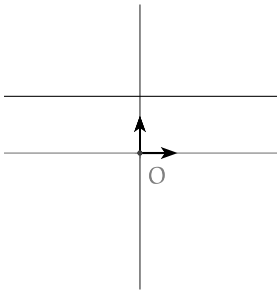
Cas pair : $n \in \mathbb{N}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x^{2n}		$+$	0	$+$	

Cas impair : $n \in \mathbb{N}$

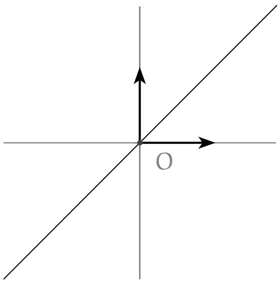
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x^{2n+1}		$-$	0	$+$	

Constante $x \mapsto a$



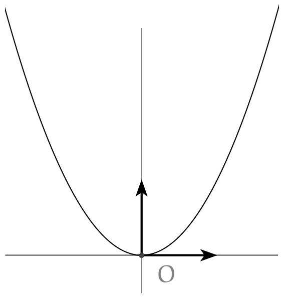
- ⋆ Paire.
- ⋆ Courbe : droite horizontale.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 0$.

Identité $x \mapsto x$



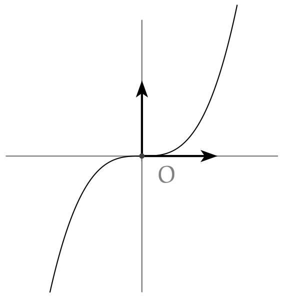
- ⋆ Impaire.
- ⋆ Courbe : droite linéaire.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 1$.

Carré $x \mapsto x^2$



- ⋆ Paire.
- ⋆ Courbe : parabole.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 2x$.

Cube $x \mapsto x^3$



- ⋆ Impaire.
- ⋆ Courbe : pas de nom.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 3x^2$.

5.3 Fonctions affines (polynômes de degré 1 ou 0)

Définition 11. Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés. Le nombre a est le *coefficient directeur* de f, le nombre b son *ordonnée à l'origine*.

Proposition 11. ⋆ La courbe représentative d'une fonction affine est une *droite affine*.

⋆ Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

⋆ Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

⋆ Si $a > 0$,

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

⋆ si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Méthode 3. Obtenir l'équation réduite d'une droite.

On choisit deux points A et B de la droite, on calcule son coefficient directeur. L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en résolvant.

5.4 Trinômes (polynômes de degré 2)

Définition 12. Une fonction *trinôme du second degré* à coefficients réels est une fonction de la forme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont fixés et $a \neq 0$. La courbe représentative d'un trinôme est une *parabole*.

Proposition 12. Le *discriminant* du trinôme p est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

⋆ si $\Delta > 0$, deux racines : $\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$. Factorisation : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

⋆ si $\Delta = 0$, une racine : $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$. Factorisation : $a(x - x_0)^2$.

signe :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

⋆ si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

signe :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

5.5 Fonction inverse

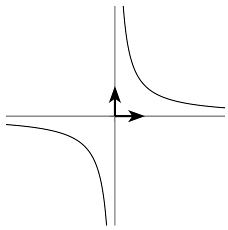
Définition 13. La fonction *inverse* est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction qui s'écrit comme un nombre fini de sommes et de produits faisant intervenir l'identité, l'inverse et les constantes. Une fonction rationnelle s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes.

Le quotient de deux fonctions affines est une *fonction homographique.* Elle est représentée par une *hyperboles* si son dénominateur est non constant et non proportionnel au numérateur.

PROPOSITION 13. L'inverse est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Elle est impaire, représentée par une hyperbole, et de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0
$\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	



PROPOSITION 14 (« Plus haut degré »). Soient $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_m$ des réels, avec $a_n, b_m \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Démonstration. ✎ Factoriser numérateur et dénominateur par leur terme dominant. □

EXEMPLE 15. ✎ ① $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 + 1$ ② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-x}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{1+2x^5}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x+3}$

6. Radicaux

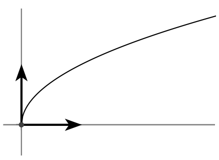
6.1 Fonction racine n-ième

DÉFINITION 14. Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ établit une bijection de $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si n impair) et de $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (si n pair). On note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ la bijection réciproque. On appelle racine n-ième de x le nombre $\sqrt[n]{x}$ (racine cubique si $n = 3$, et racine carrée si $n = 2$, encore notée : $\sqrt{x}$)

PROPOSITION 15 (Cas n pair). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction racine n-ième est définie, continue et strictement croissante sur $\mathcal{D}_n$. Elle est dérivable sur $\mathcal{D}_n^*$. Sa courbe admet une tangente verticale à l'origine.

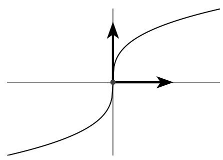
Cas n pair

x	0	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0 $+$	



Cas n impair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	$-$	0	$+$



PROPOSITION 16. La fonction racine n-ième a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ \dfrac{d\sqrt{x}}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. On dérive $h : x \mapsto (\sqrt[n]{x})^n$ de deux manières. □

PROPOSITION 17. $\forall (n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_n^2$: ① $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$ ② $\sqrt[n]{a^n} = a$ ③ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ ④ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

Démonstration. On élève chaque membre de l'égalité à la puissance n, et on montre qu'ils sont égaux. On conclut sachant que $x \mapsto x^n$ est bijective sur D_n. □

MÉTHODE 4. Quantité conjuguée

Pour lever une forme indéterminée avec une racine carrée, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

7. Logarithmes

7.1 Définition du logarithme népérien

La continuité de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ garantit l'existence de ses primitives sur cet intervalle :

DÉFINITION 15. La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est la primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1 :

$$\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Cette définition a pour conséquence immédiate :

PROPOSITION 18.

① $\ln(1) = 0$

② ln est dérivable (et continue) sur $]0;+\infty[$. On a : $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

③ ln est strictement croissante : $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$ et $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

④ si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ sur I.

EXEMPLE 16. ✎ Résoudre $\ln(2-x^2) < 0$

EXEMPLE 17. ✎ Calculer : ① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$. ② $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

7.2 Propriétés algébriques

PROPOSITION 19.

Pour tous réels strictement positifs a et b, pour tout entier relatif n,

① $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

② $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

③ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

④ $\ln(a^n) = n\ln(a)$

⑤ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

MÉTHODE 5. Démontrer une égalité en dérivant

Pour montrer l'égalité de deux expressions dépendant d'au moins une variable x, on peut :

① considérer la fonction qui à tout x d'un intervalle I associe la différence des deux expressions (les variables supplémentaires étant des paramètres).

② Montrer que la dérivée de cette fonction est nulle sur l'intervalle I.

③ Vérifier que la fonction s'annule pour une valeur de x.

La fonction considérée est donc constante, et nulle : les deux expressions sont égales.

Démonstration de la proposition 19. ✎ ♡ : le point ① s'obtient en étudiant pour tout $a > 0$ la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ et en prouvant qu'il s'agit de la constante nulle. □

Méthode 6. Équations, inéquations d'inconnues en exposant.

Le point ④ de la propoisition 19 permet souvent de simplifier un problème dans lequel l'inconnue est en exposant : en appliquant le logarithme aux deux membres de l'égalité ou de l'inégalité, sous réserve de positivité, on fait « descendre » l'inconnue.

Exemple 18. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $0{,}9^n < 0{,}25$

7.3 Étude de la fonction logarithme néperien

Théorème 20. Logarithme Néperien

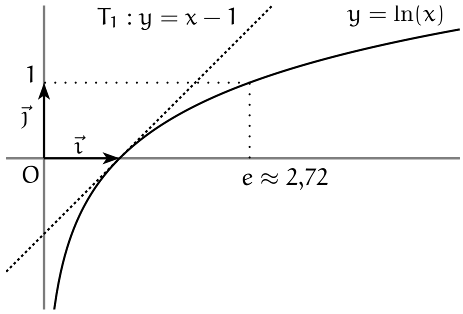
La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

① $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

② $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

③ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	0	$+\infty$
ln	‖ $-$	0	$+$



Démonstration. ③ : on doit prouver : $\forall A > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x > m,\ \ln(x) > A$.
Mais $\ln 2 > \ln 1 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$, donc pour tout $A > 0$, il existe $n > 0$ tel que $\ln(2^n) > A$. Comme ln est strictement croissante, dès que $x > m = 2^n$, on a bien : $\ln(x) > A$. On note que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\ln\dfrac{1}{x} = -\infty$ par composition. □

Remarque 11. La proposition 20 montre que la fonction logarithme néperien réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un réel unique, noté e, tel que $\ln(e) = 1$. On retiendra : $e \approx 2{,}72$.

7.4 Croissances comparées et taux d'accroissement

Proposition 21. Croissances comparées

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ② $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 1)

Démonstration. ✎ ① peut se déduit de l'inégalité : $\forall x > 1,\ 0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, que l'on obtient en étudiant une fonction appropriée. La limite suivante s'obtient en posant $x = 1/X$.
③ : on exprime la dérivabilité en 1 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ □

Remarque 12. Plus généralement : $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^n}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^m \ln(x)^n = 0$.

7.5 Logarithmes de base a

Définition 16. Si $a > 1$, *le logarithme de base* a est $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour $x > 0$.
On note en particulier $\log = \log_{10}$, que l'on appel logarithme décimal.

Remarque 13. Le logarithme de base $a > 1$ a les mêmes variations, limites, et propriétés ① à ③ de la proposition 19 que le logarithme néperien. On définit de même un logarithme de base $a \in]0\,;1[$, qui vérifie : $\log_a = -\log_{1/a}$.

Exemple 19. ✎ Calculer $\log(10^n)$, où $n \in \mathbb{Z}$ puis calculer $\log'$. L'avantage du logarithme décimal est qu'il se comporte bien avec les puissances de 10, son inconvénient est d'avoir une dérivée plus compliquée que celle de ln. En mathématiques on préférera donc ln.

8. Fonctions exponentielles

8.1 Définition de l'exponentielle

DÉFINITION 17. La fonction exponentielle, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

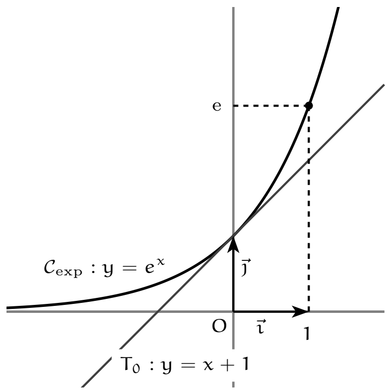
La définition implique immédiatement les propriétés suivantes :

PROPOSITION 22. EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

① $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$.
② $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x$
③ $\exp(0) = 1$
④ $\exp(1) = e$
⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
⑦ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$
⑧ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$
⑨ $(e^u)' = u'e^u$, u dérivable sur I.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1	$+\infty$
exp'		$+$	



Démonstration. ✎ ⑧ est le seul point qui n'est pas une conséquence immédiate de la définition 17 et de la proposition 20. On dérive de deux manières différentes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\exp(x))$.

8.2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

PROPOSITION 23.

Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n,

① $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
② $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
③ $\sqrt{\exp(a)} = \exp(\frac{1}{2}a)$
④ $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
⑤ $\exp(a)^n = \exp(na)$

Démonstration. ✎ Pour chacune des égalités, on prouve que le logarithme du membre de droite égale le logarithme du membre de gauche, et on conclut du fait que le logarithme est une bijection. □

REMARQUE 14. Ces propriétés permettent de prouver que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $e^q = \exp(q)$. On définit alors les puissances irrationnelles de e par $e^x = \exp(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 24. CROISSANCES COMPARÉES

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ③ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Démonstration. Poser $x = \ln(X)$, et utiliser la proposition 21. □

REMARQUE 15. Plus généralement, pour tous $\alpha > 0$ et $n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$.

8.3 Exponentielles de base a

En généralisant la remarque 14, on a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Q},\ a^b = (e^{\ln(a)})^b = e^{b\ln(a)}$. Cela nous pousse à définir :

DÉFINITION 18. Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, on pose $\boxed{a^b = e^{b \ln(a)}}$

On appelle *exponentielle de base* a la fonction $x \mapsto a^x$.

MÉTHODE 7. Exposant variable

Dès qu'on travaille avec une expression où l'exposant est variable ou irrationnel, on la transforme avec la définition 18. (valable pour les études de limites, fonctions, pour les résolutions d'équations, d'inéquations…)

EXEMPLE 20. ✎ Étudier les fonctions suivantes : ① $x \mapsto x^\pi$ ② $x \mapsto 0{,}5^x$ ③ $x \mapsto x^x$

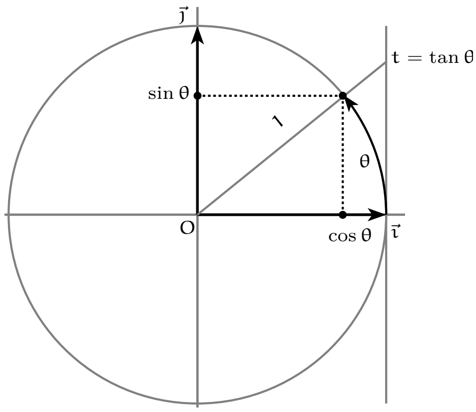
REMARQUE 16. On vérifie que l'exponentielle de base a est la bijection réciproque du logarithme de base a.

9. Fonctions circulaires

9.1 Motivation des définitions qui suivent

Soient t un réel positif, $T(1;t)$ et M_t le point d'intersection du segment $[OT]$ avec $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique (équation $x^2+y^2=1$). On peut montrer que $M_t\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}};\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$.
On définira au chapitre « §5 Courbes paramétrées » la longueur d'un arc paramétré par $(x(t);y(t))$, où x et y sont dérivables et de dérivées continues sur $[a;b]$, par

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$



D'où la longueur $\theta(t_0)$ de l'arc de cercle parcouru dans le sens trigonométrique entre $I(1;0)$ et M_{t_0} est :

$$\theta(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Ces formules motivent les définitions qui vont suivre :

9.2 La fonction arc tangente

DÉFINITION 19. La fonction *arc tangente*, notée arctan, est la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Ainsi : $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$
On définit aussi le nombre π par $\pi = 4\arctan(1)$.

LEMME 25. On a : $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. Calculer $f(1)$ et f' puis conclure. □

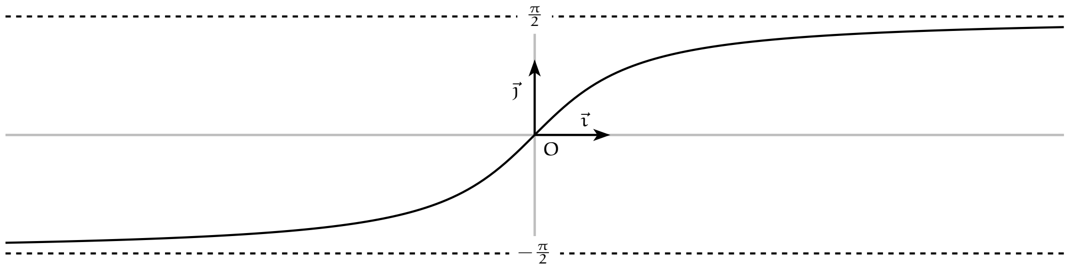
PROPOSITION 26. ARC TANGENTE

La fonction arc tangente est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Elle est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$
arctan	$-$	0	$+$

Démonstration. Pour l'imparité, étudier $h : x \mapsto -\arctan(-x)$. (voir aussi la définition 19 et le lemme 25) $\square$



Exemple 21. ✎ Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

9.3 Fonction tangente

La fonction arc tangente étant continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, elle est bijective et admet une bijection réciproque :

Définition 20. La fonction *tangente*, notée tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ comme :

- ⋆ bijection réciproque de arctan sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$,.
- ⋆ le prolongement π-périodique de cette réciproque ailleurs : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$

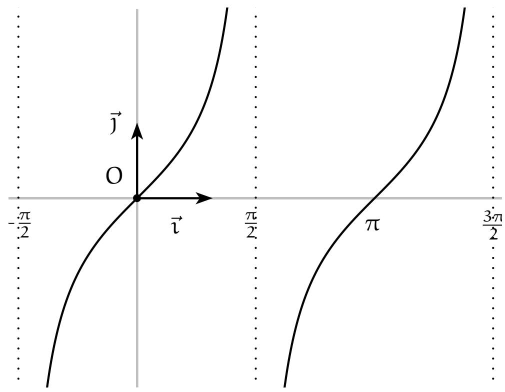
Exemple 22. ✎ Calculer $\tan\left(\arctan(\frac{\pi}{7})\right)$, $\tan 0$, $\tan\frac{\pi}{4}$, et $\arctan\left(\tan(\frac{5\pi}{4})\right)$.

Proposition 27. Tangente

La fonction tangente est définie, continue et (indéfiniment) dérivable sur tout intervalle de la forme $]k\pi + \pi/2\,; k\pi - \pi/2[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
On a $\tan(a) = \tan(b)$ ssi $a = b + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

tan est impaire et π-périodique. $\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$
$\tan'$		$-$	0	$+$	



Démonstration. Découle des propriétés de arctan. Pour tan′, dériver de deux façons $\arctan \circ \tan$. $\square$

Proposition 28. Soient a et b réels avec a, b et $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$

Démonstration. ✎ Soit $y > 0$. On pose $h :]-\infty\,; 1/y[\longrightarrow \mathbb{R} \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

En dérivant, puis en calculant $h(0)$ on montre que $h(x) = \arctan(x) + \arctan(y)$.

Avec $x = \tan(a)$ et $y = \tan(b)$, et en considérant $\tan(h(x))$, on obtient le résultat pour $\tan(a) < 1/\tan(b)$.

On le généralise en s'aidant de l'imparité et du lemme 25. $\square$

9.4 Fonctions cosinus et sinus

Définition 21. Les fonctions *cosinus* et *sinus*, respectivement notées cos et sin sont définies ainsi : pour tout réel $\theta \in]\pi/2\,;\pi/2[$, on pose

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$$

On pose également $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.

On prolonge ces fonctions à $\mathbb{R}$ en posant $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$.

Exemple 23. ✎ À partir de la proposition 28 et de la définition 21, démontrer que :

① $\cos^2+\sin^2 = 1$ ② $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ ③ $\dfrac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$ ④ $\cos' = -\sin$ ⑤ $\sin' = \cos$

On déduit de même les formules de linéarisation de la proposition 40.

Proposition 29. Sinus

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1\,;1]$.
Elle est continue, impaire et 2π-périodique.

La fonction sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\sin' = \cos}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
sin	0	$+$			0	$-$			0

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés de la fonction tangente.

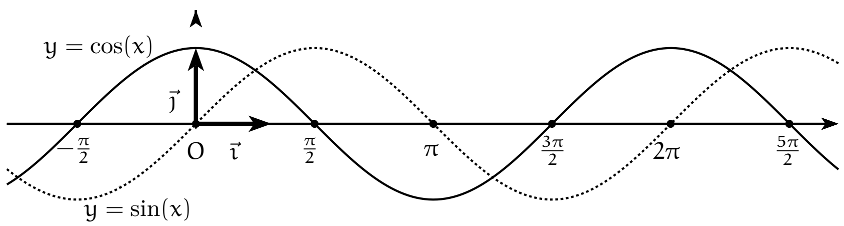
Proposition 30. Cosinus

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1\,;1]$.
Elle est continue, paire et 2π-périodique.

Elle est indéfiniment dérivable et $\boxed{\cos' = -\sin}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
cos		$+$	0		$-$		0	$+$	

Démonstration. même principe que pour la proposition 29. □



9.5 Fonction arc cosinus

D'après la proposition 30, la fonction cosinus est une bijection strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$.

Définition 22. La fonction *arc cosinus* : $\arccos : [-1\,;1] \to [0\,;\pi]$, est la bijection réciproque de la fonction cosinus $\cos : [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$.

Proposition 31. Arc cosinus

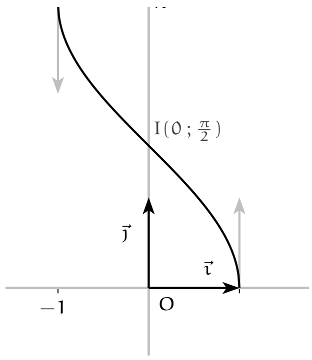
La fonction arc cosinus est définie, continue sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $[0\,;\pi]$.

Elle est dérivable sur $]-1\,;1[$, et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

x	-1		1
arccos	π	$\searrow$	0
arccos		$+$	0

La courbe d'arc cosinus est symétrique par rapport à $I(0\,;\frac{\pi}{2})$ et admet deux tangentes verticales d'équations $x=-1$ et $x=1$.



Démonstration. ✎ Pour $\arccos'$, dériver $\cos\circ\arccos$. □

Remarque 17. ✎ pour $x\in[-1\,;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. (utiliser $\cos^2+\sin^2=1$)

9.6 Fonction arc sinus

D'après la proposition 29, la fonction sinus est une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1\,;1]$.

Définition 23. La fonction *arc sinus* : $\arcsin : [-1\,;1] \to [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, est la bijection réciproque de la fonction sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}] \to [-1\,;1]$.

Proposition 32. Arc sinus

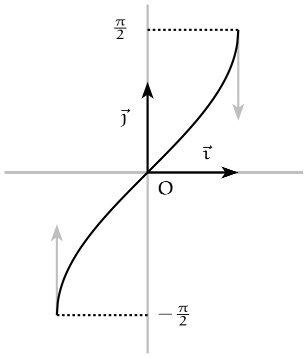
La fonction arc sinus est définie, continue sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$.

Elle est dérivable sur $]-1\,;1[$, et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

x	-1				1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
arcsin		$-$	0	$+$	

La fonction arc sinus est impaire, sa courbe admet deux tangentes verticales d'équations $x=-1$ et $x=1$.

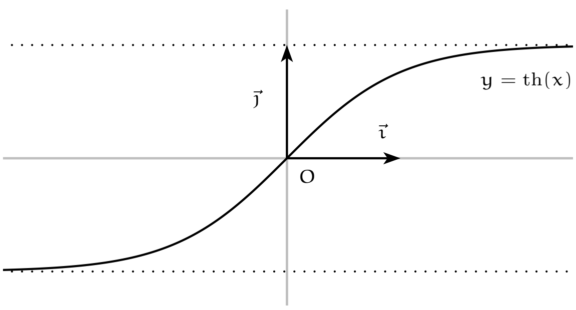


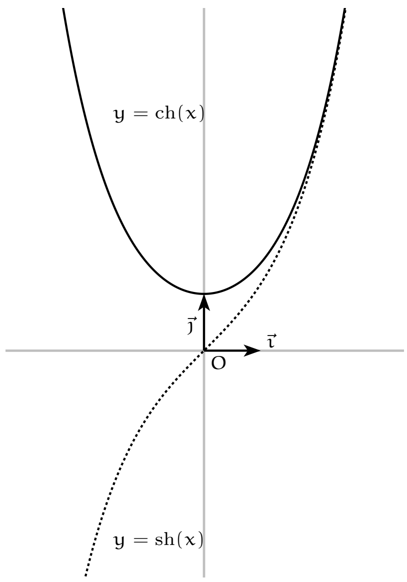
10. Fonctions hyperboliques

10.1 Définition des fonctions hyperboliques

Définition 24. On définit les fonctions

- ⋆ *cosinus hyperbolique* : $\mathrm{ch} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- ⋆ *sinus hyperbolique* : $\mathrm{sh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
- ⋆ *tangente hyperbolique* : $\mathrm{th} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$





10.2 Étude des fonctions hyperboliques

Les études suivantes se réalisent en revenant à la définition 24

Proposition 33. Cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est paire.

Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\mathrm{ch}' = +\mathrm{sh}}$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
ch			$+$		

Proposition 34. Sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est impaire.

Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	

Proposition 35. Tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est impaire.
Elle est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = +1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	↗	0	↗	1
th		$-$	0	$+$	

Remarque 18. ✎ La définition 24 implique des formules telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

11. Plan d'étude d'une fonction

① *Ensemble de définition $\mathcal{D}$* : on le recherche s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
- ⋆ on trouve les valeurs interdites venant des quotients en résolvant : « dénominateur $= 0$ »
- ⋆ les compositions $\ln(u)$, $\sqrt{u}$, $\arcsin(u)$, $\arccos(u)$ sont définies sur l'ensemble des solutions de $u(x) > 0$, $u(x) \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant u(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant u(x) \leqslant \pi$.

② *Périodicité, parité* :
- ⋆ on recherche une périodicité éventuelle (et, dans ce cas on restreint l'ensemble d'étude à une période).
- ⋆ on recherche la parité, qui permet de restreindre l'ensemble d'étude aux réels positifs de $\mathcal{D}$.

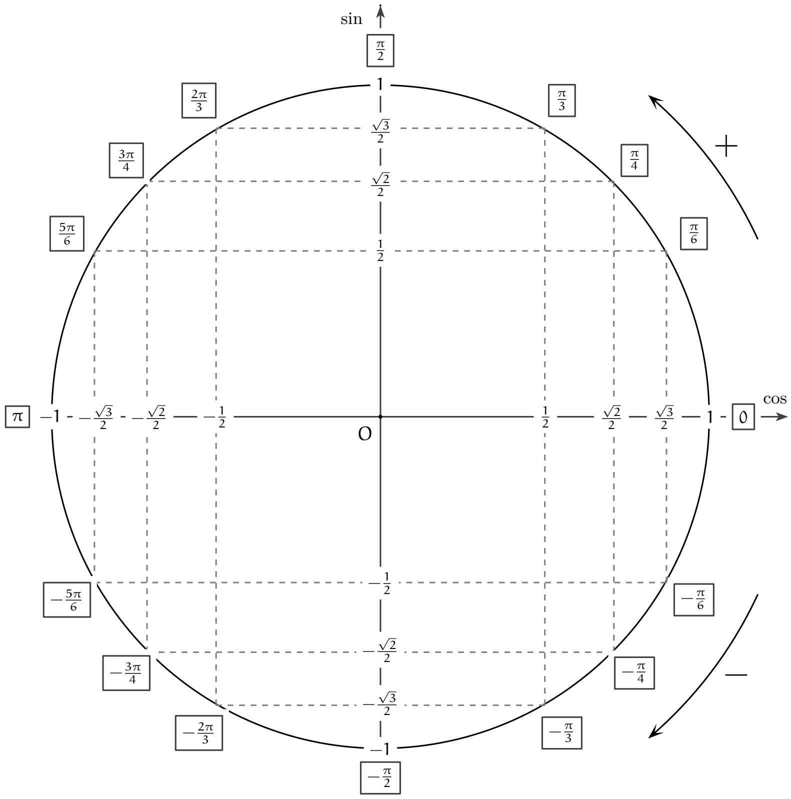
③ *Variations* : on étudie l'ensemble de dérivabilité puis la dérivée pour obtenir les variations et les extrema (qui correspondent à des tangentes horizontales). Si le signe de la dérivée est compliqué à obtenir, on peut envisager d'étudier les variations de la dérivée afin d'obtenir son signe.

④ *Limites* : on calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

⑤ *Asymptotes et branches paraboliques* aux bornes a de l'ensemble de définition.
- ⋆ si $m \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale d'équation $x = m$.
- ⋆ si $m = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$: asymptote horizontale d'équation $y = \ell$
- ⋆ si $m = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to m} f(x) = \pm\infty$: $\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty : \text{branche parabolique de direction } (Oy). \\ \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = 0 : \text{branche parabolique de direction } (Ox). \\ \text{si } \lim\limits_{x\to m} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} : \text{branche parabolique de direction } y = ax. \\ \text{– si de plus } \lim\limits_{x\to m} f(x) - ax = b \in \mathbb{R} : \text{asymptote } y = ax + b. \end{cases}$

⑥ *Courbe* : on trace les tangentes dont on a calculé les équations (horizontales et verticales), les asymptotes, et on représente la courbe de manière cohérente avec l'étude.

12. Formulaire de Trigonométrie



Proposition 36. ♡ Formule de Pythagore : $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

Proposition 37. Formules de symétrie (♡ graphiquement)

① $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

② $\cos(-x) = \cos x$

③ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

④ $\cos(x + \pi) = -\cos x$

⑤ $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

⑥ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

⑦ $\sin(-x) = -\sin x$

⑧ $\sin(\pi - x) = \sin x$

⑨ $\sin(x + \pi) = -\sin x$

⑩ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

⑪ $\tan(x + 2\pi) = \tan x$

⑫ $\tan(-x) = -\tan x$

⑬ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

⑭ $\tan(x + \pi) = \tan x$

⑮ $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan(x)}$

Proposition 38. Formules d'addition

① ♡ $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

② ♡ $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

③ ♡ $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

④ $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

⑤ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

⑥ $\tan(a - b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Proposition 39. Formules de duplication : ♡

① $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

② $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

③ $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Proposition 40. Formules de linéarisation

① $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a - b) + \cos(a + b)\right)$

② $\cos(a)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$

③ $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a - b) - \cos(a + b)\right)$

④ $\sin(a)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

⑤ $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a - b) + \sin(a + b)\right)$

⑥ $\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$

Proposition 41. Formules de factorisation

① $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

② $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

③ $\sin(a) + \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

④ $\sin(a) - \sin(b) = -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Proposition 42. Tangente de l'angle moitié.

Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$, et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. Alors : ① $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ② $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ③ $\tan(\theta) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

TD §2

Études de fonctions

Exercice 1. Étude de fonctions simples

Étudier et construire la courbe de la fonction

① $x \mapsto x^2 e^{-x^2}$ ② $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{1}{2}$ ③ $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$ ④ $x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 - 9x$ ⑤ $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2. Étude d'une fonction et de sa réciproque

Étudier la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$ et représenter sa courbe dans un repère orthonormé.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque $f^{\langle -1 \rangle}$.

Représenter la courbe de la fonction réciproque dans le même repère.

Exercice 3. Fonction non croissante de limite infinie en l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\sin(x) + x$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

① Étudier f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
② Montrer que f est impaire et que $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\,;2\pi)$.
③ Représenter $\mathcal{C}$ sur $[-\pi\,;5\pi]$.
④ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 4. Une fonction irrationnelle

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

① Montrer la relation $(\mathcal{R})$: pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1 \qquad (\mathcal{R})$.
② Calculer la limite de f en $-\infty$. Déduire de $(\mathcal{R})$ la limite de f en $+\infty$. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
③ Dresser le tableau de variations de f.
④ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
⑤ Déterminer la position relative de T_0 avec $\mathcal{C}$.
⑥ Exprimer en fonction du réel $a > 0$ les coordonnées du point d'intersection J_a de T_a et T_{-a}.
Montrer que l'ensemble des points J_a est le segment $]OJ[$, où $J(0\,;1)$.
⑦ Représenter T_0, les asymptotes de $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$ elle-même.

Exercice 5. Étude de fonctions circulaires et réciproques

Étudier l'application : ① $x \mapsto \cos^2(x) + \cos(x)$ ② $x \mapsto \arccos(\cos(x))$ ③ $x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\sin(x))$

Égalités et inégalités

Exercice 6. Valeurs de fonctions circulaires et de leurs réciproques

Calculer : ① $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ ② $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ ③ $\sin \arcsin(-0{,}7)$ ④ $\arctan(\sqrt{3})$

Exercice 7. Somme télescopique et arctan

ATS 2008

① Montrer que pour tout entier naturel k, $\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$.

② En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice 8. Égalité avec la fonction arc tangente

Montrer que : $\arctan(7) + 2\arctan(3) = \dfrac{5\pi}{4}$

Exercice 9. Simplifier en dérivant

En reconnaissant sa dérivée, simplifier l'expression de la fonction :

① $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ ② $x \mapsto 2\arctan(e^x) - \arctan(\mathrm{sh}(x))$ ③ $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$

Exercice 10. Trigonométrie hyperbolique

Démontrer : ① $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(a)$ ② $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$

Exercice 11. Sommes de référence

Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. ② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Récurrences

Démontrer par récurrence : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k a) = \frac{\sin(2^n a)}{2^n \sin(a)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 13. Inégalité

Démontrer : ① $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$ ② $\forall x \in]0\,;1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ ③ $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$

Autres

Exercice 14. Équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

① $\ln\left(\dfrac{x+3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln(x)+\ln(3))$ ② $\arccos(x) = \arcsin(x)$ ③ $\mathrm{ch}(x) = 2$ ④ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ ⑤ $2^{x^3} = 3^{x^2}$

⑥ $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

Exercice 15. Dériver

Étudier le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de : ① $x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ② $x \mapsto \arcsin(\mathrm{th}(x))$

Exercice 16. Limites et croissances comparées

Calculer : ① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^3+1)e^{-x}$ ② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x+1}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Défis

Exercice 17. Équation fonctionnelle d'une constante

Soit f une fonction continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x)$. Démontrer que f est constante.

Exercice 18. Signe d'une fonction continue sans zéro

Soit f une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle I. Démontrer (par l'absurde) que f est de signe constant.

Exercice 19. Points d'inflexions de la courbe de Gauss
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

① Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente $\mathcal{T}$ sur $[0\,;+\infty[$.
② Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$. Préciser son équation.
③ Montrer que f est paire et étudier ses variations. Représenter $\mathcal{C}$.

Exercice 20. Comparer deux nombres
Dans les écritures qui suivent les pointillés représentent $n \in \mathbb{N}$ chiffres 1 :

$$a = \frac{111\ldots112}{111\ldots113} \quad ; \quad b = \frac{111\ldots113}{111\ldots114}$$

De a ou de b, quel est le plus grand ?

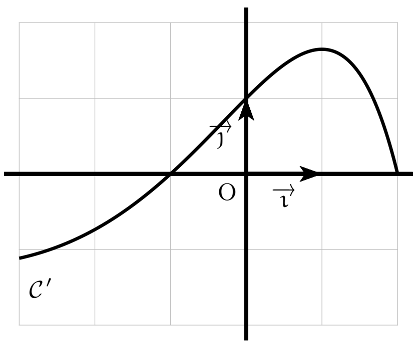
Exercice 21. (In)équations avec paramètre
Dans toute la suite m est un paramètre réel fixé.

① Résoudre en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$: $m(mx+1) - 7 = 3\left(3x - \frac{4}{3}\right)$
② Donner le nombre de solution en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.
   (a) $(m-2)x^2 + 2(m+1)x + m - 14 = 0$
   (b) $(m+3)x^2 - (2m-1)x + m + 4 = 0$
   (c) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 2m - 3 = 0$
③ Pour quelles valeurs de m l'inéquation $(m+3)x^2 - 2(m+1)x - (m+1) > 0$ admet-elle $\mathbb{R}$ pour ensemble de solutions ?
④ Pour quelles valeurs de m l'équation $3x^2 - 5x + m + 7 = 0$ admet-elle deux racines distinctes et strictement positives ?

Exercice 22. Lecture graphique
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;2]$.

On sait que $f(0) = -1$ et que la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci–dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

① Si $x \in [-3\,;-1]$, alors $f'(x) \leqslant 0$. Réciproque ?
② La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
③ Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$, $f(x) \geqslant -1$.
④ Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$.

Exercice 23. Intersection avec les axes
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

Bilan § 2

Prérequis

⋆ §1 les sections 2.2 (égalité) et 3.3 (équation) ☐

Objectifs prioritaires

① savoir prouver qu'une fonction est paire, impaire ou périodique (définition 2) ☐

② savoir déterminer les asymptotes d'une courbe (section 2.3) ☐

③ savoir dériver et utiliser la dérivée ☐

(a) connaître les formules de dérivation (proposition 2) ☐

(b) savoir calculer les dérivées dans les exercices 1, 5 et 15 ☐

(c) savoir trouver une équation de tangente (section 2.4, exercice 4) ☐

(d) démontrer une égalité en dérivant (méthode 5, exercice 9) ☐

(e) démontrer une inégalité, étudier un signe en dérivant (méthode 1, exo 13) ☐

④ savoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (théorème 4) ☐

⑤ Tout savoir sur les polynômes et la fractions rationnelles (section 5) ☐

⑥ Tout savoir sur les logarithmes (section 7) ☐

⑦ Tout savoir sur les exponentielles (section 8 et la formule de la section 8.3) ☐

⑧ Tout savoir sur les fonctions circulaires et leurs réciproques (section 9) ☐

(a) savoir refaire les exercices 6 et 9 ☐

⑨ Tout savoir sur les fonctions hyperboliques (section 10) ☐

(a) savoir refaire les exercices 10 et 11 ☐

⑩ connaître le plan d'étude d'une fonction (section 11) ☐

⑪ connaître les formules et propositions marquées ♡ de la section 12 ☐

Objectifs secondaires

① comprendre la notion générale de réciproque (section 4.6, exercice 2) ☐

② connaître le théorème d'existence de primitive (section 4.7) ☐

③ connaître les fonction irrationnels (avec radicaux) section 6 ☐

Approfondissement

① connaître les formules et propositions de la section 12 (même sans ♡ !) ☐

② maîtriser les fonctions rares « partie entière (4.2) » et « valeur absolue (4.3) » ☐