§ 19 : Réduction d'endomorphismes

1. Endomorphismes diagonalisables

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'apprendre à trouver des bases dans lesquelles les matrices d'endomorphismes ont des expressions les plus simples possibles (idéalement diagonales).

Exemple 1. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

① Justifier que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

② Vérifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

③ Calculer D^n. Exprimer D en fonction de A et de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

④ En déduire $A^n = PD^nP^{-1}$ puis une expression de A^n.

Les problèmes qui se posent sont les suivants :

⋆ Comment trouver les vecteurs u et v de l'énoncé ? Proposer une démarche si on connaît λ et μ.

⋆ Comment trouver λ et μ ?
Montrer que $\exists u \neq 0,\ Au = \lambda u \iff \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$, et expliquer comment trouver λ et μ.

1.2 Éléments propres

Notation 1. Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des complexes ($\mathbb{C}$) ou celui des réels ($\mathbb{R}$).

On désignera par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et par $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Définition 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Un vecteur non nul $u \neq 0$ de E est un *vecteur propre* de f associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si

$$f(u) = \lambda\, u$$

L'ensemble $\ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ est le *sous-espace propre* de f associé à la valeur λ. Il est parfois noté E_λ.

L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme f est le *spectre* de f, noté $\mathrm{sp}(f)$.

Remarque 1. ⚠ Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre.

Remarque 2. Le nombre λ est valeur propre si et seulement si le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ de E n'est pas réduit à $\{0\}$: $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$.

En effet, $\exists u \in E \setminus \{0\} : f(u) = \lambda u \iff \exists u \in E \setminus \{0\} : (f - \lambda \mathrm{Id})(u) = 0_E \iff \exists u \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}),\ u \neq 0_E$.

Dans ce cas, il contient les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, et le vecteur nul.

Méthode 1.

Pour vérifier qu'un vecteur donné est vecteur propre, on calcule simplement $f(u)$ et on trouve la valeur propre λ telle que $f(u) = \lambda u$.
Pour vérifier qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f, on montre que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0_E\}$ (on peut par exemple déterminer une base de ce noyau avec les méthodes du chapitre §12).

Exemple 2 (Espace). ✎ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -6 \\ -12 & -4 & 6 \\ 12 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que u est un vecteur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer que -1 est valeur propre et déterminer une base (v, w) du sous-espace propre associé.

Donner la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (u, v, w).

Exemple 3 (Polynômes). ✎ Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

Vérifier que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme, dont $(X+1)^2$, $(X-1)^2$ et X^2-1 sont vecteurs propres.

Donner la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base formée des trois vecteurs précédents.

Exemple 4 (Théorique). ✎ Soit $\mathcal{L}$ un endomorphisme non injectif d'un espace vectoriel E.

Montrer que $\mathcal{L}$ possède une valeur propre au moins, que l'on précisera.

Proposition 1. une somme d'espaces propres est directe

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors on a les propriétés équivalentes suivantes :

- ⋆ les espaces propres $E_1 = \ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id}), \dots, E_n = \ker(f - \lambda_n \mathrm{Id})$ sont en somme directe,
- ⋆ la famille de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_k \in E_k \setminus \{0\}$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ est libre.
- ⋆ une famille réunissant n familles libres de chacun des E_k, est-elle même libre.
- ⋆ une famille réunissant n bases de chacun des E_k, est une base de $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.
- ⋆ $\dim\left(E_1 \oplus \dots \oplus E_n\right) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$.

Démonstration. On montre la seconde propriété par récurrence sur n :

⋆ initialisation : le vecteur propre e_1 étant non nul, il forme une famille libre : la propriété est vraie au rang 1.

⋆ transmission : on suppose qu'une famille de n vecteurs associés à des valeurs propres distinctes est libre. On va prouver qu'il en est de même pour la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ formé de vecteurs propres associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$.

On résout $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n+1} e_{n+1} = 0$.

En composant avec $f - \lambda_{n+1}\mathrm{Id}$: $\alpha_1(f(e_1) - \lambda_{n+1}e_1) + \dots + \alpha_n(f(e_n) - \lambda_{n+1}e_n) + \alpha_{n+1}(f(e_{n+1}) - \lambda_{n+1}e_{n+1}) = 0$,

donc $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})e_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_k - \lambda_{n+1})e_n = 0$.

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on a : $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \dots = \alpha_k(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$,

et comme les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes : $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ainsi on a $\alpha_{n+1}e_{n+1} = 0$ donc $\alpha_{n+1} = 0$ car $e_{n+1} \neq 0$. Finalement, la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre.

⋆ conclusion : la proposition est vraie. □

Exemple 5 (Homothétie). ✎ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'endomorphisme $h_\lambda : E \longrightarrow E,\ u \mapsto \lambda u$ est l'*homothétie de rapport* λ. Quelles sont les valeurs propres et les espace propres associés de h_λ ?

Si E est de dimension finie, que dire de la matrice de h_λ dans une base $\mathcal{B}$?

Exemple 6 (Projecteur). ✎ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Un projecteur est un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

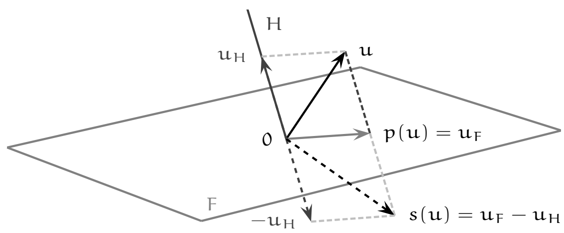
① Montrer que $(p - \mathrm{Id}) \circ p = 0$.

② En déduire $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(p - \mathrm{Id})$.

③ Montrer enfin que $\ker(p - \mathrm{Id}) \oplus \ker p = E$.

④ Que dire des valeurs propres de p ?

On dit que p est la projection sur $F = \ker(p - \mathrm{Id})$ parallèlement à $H = \ker(p)$.



Exemple 7 (Symétries). ✎ Une symétrie est un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$. Sur le même modèle que l'exemple 6, montrer que les valeurs propres d'une symétrie ne peuvent être que 1 et -1 et que les espaces propres associés sont en somme directe.

1.3 Définition des endomorphismes diagonalisables

DÉFINITION 2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Diagonaliser un endomorphisme, c'est donner une base de vecteurs propres et les valeurs propres associés.

REMARQUE 3. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace vectoriel E, formée de vecteurs propres de l'endomorphisme f, alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale : en effet, $\forall i \in \{1 \dots, n\},\ f(e_i) = \lambda_i e_i$ où λ_i est la valeur propre associée à e_i. Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 8. Diagonaliser les endomorphismes φ de l'exemple 2 et f de l'exemple 3.

1.4 Matrices diagonalisables

DÉFINITION 3. On définit les éléments propres (valeurs, vecteurs, espaces) d'une matrice carrée A comme ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice.

EXEMPLE 9. ✎ Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{sp}(A)$.

Plus généralement, pour des exercices théoriques, on notera que le rang d'une matrice de taille n est égal à n moins la multiplicité de 0 comme valeur propre.

DÉFINITION 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonalisable } \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \text{avec } P^{-1}AP \text{ diagonale}$$

Diagonaliser une matrice, c'est donner une matrice P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.

REMARQUE 4. La matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est diagonalisable. La base de vecteurs propres correspondante est alors formée des colonnes de P.

REMARQUE 5. On verra au chapitre §22 que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

2. Diagonalisation

2.1 Définition du polynôme caractéristique

DÉFINITION 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Le polynôme caractéristiques de f est

$$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}) \in \mathbb{K}_n[X]$$

On définit pose parfois $\chi_f(X) = \det(X\mathrm{Id} - f)$, les deux définitions coïncident à un facteur $(-1)^{\dim E}$ près.

EXEMPLE 10 (Polynôme caractéristique et valeurs propres). ✎ Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme φ de l'exemple 2. Même question pour l'endomorphisme f de l'exemple 3. Qu'observe-t-on ?

REMARQUE 6. La définition du déterminant d'un endomorphisme et son indépendance par rapport à la base dans laquelle il est calculé impliquent :

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \text{ avec } a_0 = \det(f)$$

où les coefficients a_i ne dépendent pas du choix de la base.

Le coefficient a_{n-1} est appelé la *trace* de l'endomorphisme f et noté $\mathrm{tr}(f)$. Il est égal à la somme des coefficients diagonaux de la matrice de f dans n'importe quelle base. En particulier, les traces de deux matrices semblables sont égales.

EXEMPLE 11. ✎ Vérifier que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\chi_A(A) = 0$.

2.2 Multiplicité d'une valeur propre

PROPOSITION 2. VALEURS PROPRES ET POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E.
Le nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique de f. Cela se reformule ainsi :

$$\exists u \in E \setminus \{0_E\},\ f(u) = \lambda u \iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$$

La *multiplicité* d'une valeur propre λ est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique de f.

Démonstration. $\exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda u \iff \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0_E\} \iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}) < n \iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$.

PROPOSITION 3. DIMENSION D'UN ESPACE PROPRE

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit λ une valeur propre de multiplicité m_λ de l'endomorphisme f et $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ l'espace propre associé. On a : $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de f, et u un vecteur propre associée : u est non nul et vérifie $f(u) = \lambda u$ donc $u \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) = E_\lambda$. Ainsi, $E_\lambda \neq \{0\}$ et $d = \dim(E_\lambda) \geqslant 1$.

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E_λ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1 \dots, e_n)$ de E. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme :

$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{Id}_d & B \\ \hline 0_{n-d,d} & A \end{array}\right)$ d'où en utilisant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}) = (\lambda - X)^d \det(A - X\mathrm{Id}_{n-d})$ est un polynôme divisible par $(\lambda - X)^d$, donc $d \leqslant m_\lambda$.

PROPOSITION 4.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E.
L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (produit de facteurs de degré 1) et pour toute valeur propre λ de f, la dimension du sous-espace propre associé à λ égale la multiplicité m_λ de λ.

$$f \text{ diagonalisable} \iff \chi_f \text{ scindé et } \forall \lambda \in \mathrm{sp}(f),\ m_\lambda = \dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$$

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons f diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de f. En calculant le déterminant qui définit le polynôme caractéristique dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}) = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} (\lambda - X)^{m_\lambda} \text{ où } m_\lambda \text{ est le nombre de vecteurs propres associés à } \lambda \text{ dans } \mathcal{B}$$

Donc le polynôme caractéristique est scindé, et comme $\mathcal{B}$ est libre, E_λ a une famille libre de m_λ vecteurs et $m_\lambda \leqslant \dim\left(\ker(f - \lambda \mathrm{Id})\right)$ d'où $m_\lambda = \dim\left(\ker(f - \lambda \mathrm{Id})\right)$ en tenant compte de la proposition 1.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $m_\lambda = \dim \ker(\mathcal{L} - \lambda \mathrm{Id})$, alors la réunion de bases de chacun des espace propre forme une famille libre (proposition 1) à n éléments (car $n = \sum m_\lambda$, le polynôme caractéristique étant scindé) donc une base de vecteurs propres : f est diagonalisable. □

Remarque 7. Si son polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples, l'endomorphisme est diagonalisable.

⚠ la réciproque est fausse : un endomorphisme peut-être diagonalisable sans que son polynôme caractéristique n'ait que des racines simples : voir l'exemple 2.

Exemple 12 (Plan). ✎ Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$?

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

La dernière matrice est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$?

Remarque 8. Le dernier exemple montre l'importance du corps $\mathbb{K}$: certaines matrice peuvent être diagonalisables sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13 (Polynômes). ✎ Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X],\ P \mapsto P'$.

Donner la matrice de d_1, d_2, d_3 puis d_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivation est-elle un endomorphisme diagonalisable ?

Exemple 14 (Théorique). ✎ Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n'ayant qu'une seule valeur propre est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie.

2.3 Recherche de vecteurs propres

Méthode 2. Tests

Pour trouver les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée A, on cherche des relations entre les colonnes de $A - \lambda \mathrm{Id}$ en essayant des valeurs simples pour λ : $0, 1, -1, 2, -2, \dots$.

Méthode 3. Recherche de vecteurs propres sans pivot

Par définition du produit matriciel, si une combinaison de colonnes d'une matrice A est nulle alors le vecteur formé des coefficients de cette combinaison est dans le noyau.
C'est utile pour trouver des vecteurs propres sans pivot. Justifier qu'on a obtenu une base de l'espace propre revient alors à un argument de dimension.
Cas particulier : si la somme S des coefficients de chaque ligne est identique, alors S est valeur propre de vecteur propre le vecteur dont tous les coefficients valent 1.

Exemple 15. si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$

et comme la matrice est de rang au moins 2 (les colonnes ne sont pas colinéaires) $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \leqslant 1$ d'où $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(u)$.

La somme des coefficients de chaque ligne vaut 3 : $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 3.

✎ Avec un test, terminer la diagonalisation.

Exemple 16. ✎ Diagonaliser : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode 4. Utiliser la trace et le déterminant

Si la méthode de test ne donne pas toutes les valeurs propres, on peut utiliser les informations suivantes : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$ de la matrice A :
- ⋆ $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k$.
- ⋆ $\det(A) = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_k^{m_k}$.

Exemple 17. ✎ Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Donner son rang et la dimension de son noyau. En déduire $m_0 \geqslant n - 1$.

Donner une valeur propre non nulle de U et une matrice diagonale à laquelle U est semblable.

Méthode 5. Polynôme caractéristique

Dans les cas les plus théoriques ou dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on aura recours au polynôme caractéristique pour calculer les valeurs propres puis rechercher les vecteurs propres.

Exemple 18. ✎ Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut-on diagonaliser dans $\mathbb{R}$ la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

3. Trigonalisation

3.1 Endomorphisme, matrice trigonalisables

Définition 6. Une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est *trigonalisable* si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base est trigonalisable.

3.2 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Proposition 5.

Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (c'est-à-dire produit de facteurs de degré 1).

Remarque 9. En particulier, le théorème fondamental de l'algèbre assure que toute matrice carrée complexe est trigonalisable.

3.3 Trigonalisation en basse dimension

Définition 7. *Réduire* un endomorphisme, c'est donner une base dans laquelle sa matrice est diagonale (si possible) ou triangulaire supérieure.

Réduire une matrice carrée A, c'est donner les matrices P et $P^{-1}AP$ où cette dernière est diagonale (si possible) ou triangulaire supérieure.

Méthode 6. Matrices d'ordre 2

Si une matrice carrée d'ordre 2 est trigonalisable, mais pas diagonalisable, elle sera trigonalisable dans une base formée d'un vecteur propre et d'un vecteur quelconque non colinéaire au vecteur propre.

Exemple 19. ✎ Réduire la matrice $T = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Méthode 7. Matrices d'ordre 3

Soit une matrice carrée A d'ordre 3 trigonalisable, mais pas diagonalisable.
- ⋆ si elle possède deux valeurs propres distinctes, on procède comme dans le cas de l'ordre 2.
- ⋆ sinon, on considère un vecteur propre de la valeur propre λ, que l'on complète en une base du sous-espace vectoriel $\ker\left((A - \lambda \mathrm{Id})^2\right)$, que l'on complète enfin, au besoin, par un vecteur quelconque.

Exemple 20. ✎ Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$

4. Applications de la réduction

4.1 Puissances de matrices

MÉTHODE 8. Puissances de sommes de deux termes qui commutent

On rappelle que l'on peut appliquer la formule du binôme lorsque deux matrices A et B commutent :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Cette formule a un intérêt dès que l'on peut calculer facilement les puissances de A et B : c'est notamment le cas pour $\lambda \mathrm{Id}$ ou une matrice nilpotente N telle que $N^k = 0$.

EXEMPLE 21. ✎ Calculer A^n avec $n \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

MÉTHODE 9. Puissances, méthode générale

Dans le cas où A est diagonalisable :

① on cherche une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$ et on forme la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs propres de $\mathcal{B}$. (c'est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$).

② on calcule D^n où $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres associées à chacune des colonnes de P.

③ on calcule la matrice inverse P^{-1}.

④ on écrit $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$ et on calcule ce produit avec les éléments précédents.

Dans le cas où A est trigonalisable, mais pas diagonalisable, on cherche une matrice $D+N$ semblable à A, où D est diagonale, N est triangulaire supérieure avec une diagonale nulle, et N et D commutent, puis on applique la formule du binôme pour obtenir l'étape ②.

EXEMPLE 22. ✎ Calculer A^n avec $n \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -4 & 7 & -2 \\ -5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

4.2 Application aux systèmes différentiels

NOTATION 2. Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

DÉFINITION 8. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction réelle à valeur vectorielle (c'est-à-dire de fonctions coordonnées $x_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *système différentiel linéaire homogène à coefficients constants* le système :

$$X' = AX \iff \begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Si $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, l'équation matricielle $X' = AX + B$ désigne un *système différentiel linéaire à coefficients constants avec second membre.*

EXEMPLE 23. ✎ Résoudre le système différentiel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 10. Comme pour les équations différentielles du premier ordre, la linéarité implique que les solutions de $X' = AX + B$ sont de la forme $X + X_0$ où

⋆ X_0 est une solution particulière de $X' = AX + B$,
⋆ X parcourt les solutions de l'équation homogène $X' = AX$.

MÉTHODE 10. Systèmes différentiels

Avec les notations de la définition 8. Si le système est sans second membre,

① on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle A est semblable à une matrice diagonale D (ou triangulaire) : $D = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.

② on résout composante par composante $Y' = DY$. (on rappelle que l'équation différentielle $y' = \lambda y \iff y' - \lambda y = 0$ a pour solutions les $y(t) = Ke^{\lambda t}$ où K est une constante)

③ on écrit $Y' = DY = P^{-1}APY \iff PY' = APY$ donc les solutions sont de la forme $X = PY$.

⚠ Nul besoin de calculer P^{-1} dans ce type de problème.

EXEMPLE 24. ✎ Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x + 2y - z \end{cases}$

4.3 Application aux suites récurrentes

MÉTHODE 11. Suite géométrique vectorielle

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère une suite vectorielle (U_n), où pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $U_n \in \mathbb{K}^p$ est défini par la donnée de $U_0 \in \mathbb{K}^p$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
On obtient donc une écriture explicite des composantes de U_n en calculant A^n à l'aide des méthodes présentées dans la section 4.1

EXEMPLE 25. ✎ Soient (u_n) et (v_n) des suites complexes qui vérifient pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{13}{4}u_n + \dfrac{3}{2}v_n \\ v_{n+1} = -\dfrac{9}{2}u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n. Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Bilan du § 19

Prérequis

① Matrices : tout ! §10 Matrices .... ☐
② Espaces vectoriels : noyaux, applications linéaires. §12 Espaces vectoriels .... ☐
③ Espaces vectoriels : bases, dimension, matrice d'une application linéaire. §13 Dimension finie .... ☐
④ Déterminants : méthodes de calcul en factorisant. §17 Déterminants .... ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître la définition 1 des éléments propres et la méthode 1 pour l'appliquer .... ☐
  (a) savoir refaire les exemples 2 et 3 .... ☐
  (b) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐
② connaître la définition 5 du polynôme caractéristique (et exemple 10) .... ☐
③ connaître la notion de multiplicité d'une valeur propre (proposition 2) .... ☐
④ connaître les définitions 2 et 3 d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisables .... ☐
  (a) savoir qu'une matrice symétrique est diagonalisable (remarque 5) .... ☐
  (b) savoir la caractérisation avec les espaces propres (proposition 4) .... ☐
  (c) savoir refaire l'exemples 8 .... ☐
  (d) connaître les méthodes de recherche de valeurs propres (section 2.3) .... ☐
  (e) savoir refaire les exercices du type 2, 4 .... ☐
⑤ connaître la notion d'endomorphisme trigonalisable (section 3.1) .... ☐
⑥ savoir reconnaître un endomorphisme trigonalisable (section 3.2) .... ☐
⑦ connaître les deux méthodes de calcul de puissances de matrices (section 4.1) .... ☐
  (a) savoir refaire les exercices du type 9 et 10 .... ☐
⑧ savoir résoudre un système différentiel (section 4.2) .... ☐
  (a) savoir refaire les exercices du type 12 et 13 .... ☐
⑨ savoir résoudre un système linéaire récurrent (section 4.3) .... ☐
  (a) savoir refaire les exercices du type 15 et 16 .... ☐

Objectifs secondaires

① connaître la proposition 1 sur la liberté des vecteurs propres de valeurs propres distinctes .... ☐
② savoir reconnaître une homothétie (exemple 5), projection (ex. 6) et symétrie (ex. 7) .... ☐
  (a) savoir refaire l'exercice 5 .... ☐
  (b) connaître la notion de trace d'une matrice ou d'un endomorphisme (remarque 6) .... ☐
③ savoir trigonaliser une matrice ou un endomorphisme (section 3.3) .... ☐

Approfondissement

① savoir que le polynôme caractéristique annule son endomorphisme associé (exemple 11) .... ☐
  (a) applications à l'inverse (exercice 17), au calcul de puissances (exercice 10) .... ☐
② savoir traiter les problèmes de racines d'endomorphismes (exercices 11) .... ☐

TD du § 19

Exercice 1. Vérifier que des vecteurs sont propres

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $w = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ sont vecteurs propres de u.

Exercice 2. Diagonalisation d'une matrice

Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Caractère diagonalisable d'une matrice paramétrée ATS 2013

Pour quelles valeurs de ses paramètres la matrice suivante est–elle diagonalisable ? $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Caractère diagonalisable d'une matrice paramétrée ⋆ ATS 2002

Pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. Éléments propres et géométrie

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les éléments propres de u. Que peut-on en déduire quant à sa nature géométrique ?

Exercice 6. Famille de matrices, diagonalisation de l'une d'entre elles

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre, et dans ce cas, la diagonaliser si possible.

Exercice 7. Matrice 3×3 avec une valeur propre triple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

① Montrer que $\dim\ker(f - \mathrm{Id}) = 1$ et déterminer un vecteur propre de f noté e_1.

② Montrer que f admet 1 pour valeur propre triple. Qu'en déduire pour l'endomorphisme f ?

③ Soit $F = \ker\big((f - \mathrm{Id})^2\big)$. Montrer que $\dim F = 2$, puis que $e_1 \in F$. Déterminer ensuite e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de F.

④ Montrer que $(e_1, e_2, \vec{\imath})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et montrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est triangulaire. Donner les relations de trigonalisation. ($\vec{\imath}$ est le premier vecteur de la base canonique).

Exercice 8. Puissances d'une matrice ATS 2012

Calculer A^n pour tout entier naturel non nul n, avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9. Famille de matrices, puissances de l'une d'entre elles ATS 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a(a-7) & a-7 & a \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n pour $a = 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Limite des puissances d'une matrice ATS 2009

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et trouver la limite de A^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11. Racine carrée d'un endomorphisme

Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pourra commencer par trouver une matrice diagonale D semblable à M^2, puis prouver que $N^2 = D$ implique $ND = DN$, et chercher toutes les matrices N qui commutent à D avant de conclure.

Exercice 12. Système différentiel

Résoudre le système différentiel : ① $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x + 2y - 3z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$ ② $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$

Exercice 13. Système différentiel 2×2 avec second membre ATS 2010

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$

Exercice 14. Système récurrent linéaire 2×2 ATS 2006

Trouver les suites qui satisfont : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \end{cases}$ et $u_0 = v_0 = 1$.

Exercice 15. Suite récurrente d'ordre 3

Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sachant que $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}$.

Exercice 16. Suite de Fibonacci et matrices

Expliciter la suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

On pourra chercher une relation du type $U_{n+1} = AU_n$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Exercice 17. Diverses méthodes d'inversion de matrices ATS 2007

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ de trois façons différentes.

Exercice 18. Réduction d'une matrice paramétrée Écrits ATS 2003

Soit un espace vectoriel E de dimension 3, muni de la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f_α un endomorphisme de E de matrice dans la base B (α est un paramètre réel) :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

① Déterminer le polynôme caractéristique P_α de A_α.
Précisez les valeurs de α telles que P_α a une racine double.

② On suppose ici que α vaut 3. Déterminer dans ce cas les valeurs propres et une base de E formée de vecteurs propres de f_3.

③ On suppose que α vaut 2. Montrer que dans ce cas f_2 admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Calculer deux vecteurs propres, $\vec{v}_1$ (associé à λ_1) et $\vec{v}_2$ (associé à λ_2). f_2 est-il diagonalisable ?

④ Toujours pour $\alpha = 2$, calculer la matrice K de l'endomorphisme $g = (f_2 - 2\mathrm{Id})^2$ dans la base B.
Montrer que $(\vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$. Calculer $f_2(\vec{e}_3)$ à l'aide de $\vec{v}_2$ et de $\vec{e}_3$.

⑤ Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E. Donner la matrice T de f_2 dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$.