§18 : Séries de Fourier

1. Polynômes de Fourier

1.1 Définition

Le but de ce chapitre est d'obtenir une écriture de certaines fonctions sous forme de sommes infinies de fonctions trigonométriques. C'est la décomposition de fonctions en de telles séries qui a permis au mathématicien Joseph Fourier (1768-1830) de résoudre le problème de l'équation de la chaleur, au début du 19e siècle.

Définition 1. Soit $\omega > 0$. Un *polynôme de Fourier* est une combinaison linéaire des fonctions suivantes :

$$C_0 = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ C_k : t \mapsto \cos(k\omega t) \text{ et } S_k : t \mapsto \sin(k\omega t)$$

Exemple 1. $x \mapsto 1 - \sin(3x) + 2\cos(x)$ est un polynôme de Fourier. Vérifier que $\cos^2$ en est un aussi.

1.2 Coefficients d'un polynôme de Fourier et intégrales

Exemple 2. Calculer les intégrales suivantes (n et m sont des entiers naturels non nuls) :

① $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt$ ② $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt$ ③ $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt$

④ $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\,dt$ ⑤ $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt$ ⑥ $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt$

Pour les deux dernières, on distinguera les cas où $m = n$ et où $m \neq n$.

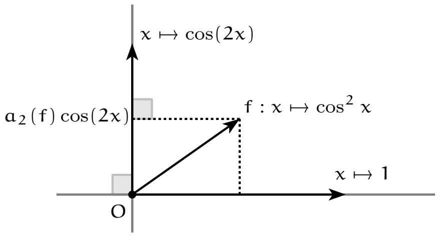
Exemple 3. Soit le polynôme de Fourier $f(x) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big)$

À l'aide des résultats de l'exemple 2, exprimer a_0, a_j puis b_j pour $j \in \mathbb{N}^*$, avec une intégrale et f.

1.3 Interprétation géométrique

Remarque 1. L'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int fg$ peut s'interpréter comme un produit scalaire sur l'espace des polynômes trigonométriques, dont les fonctions $C_0, C_n \ldots, S_n \ldots$ forment une base orthogonale.
Le théorème de Pythagore se généralise en

$$\frac{1}{2\pi}\int f^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$



2. Série de Fourier d'une fonction

2.1 Coefficients de Fourier

Notation 1. Dans tout le chapitre, $T > 0$ désignera la période d'une fonction et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation associée.

> Définition 2. Soit f une fonction T–périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les *coefficients de Fourier* de la fonction f sont les nombres :
>
> $$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Remarque 2. Dans le cas fréquent où $T = 2\pi$, on a $\omega = 1$ et pour f continue par morceaux et 2π–périodique :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Remarque 3. l'intégrale d'une fonction T–périodique est la même sur tout intervalle de longueur T. Ainsi, on peut remplacer les intervalles d'intégrations dans la définition 2 par n'importe quel intervalle de longueur T. Par exemple, pour une fonction 2π–périodique, on a :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Remarque 4. l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-T/2\,;T/2]$ étant nulle, si f est T–périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et

- ⋆ si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$.
- ⋆ si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$.

Exemple 4 (Monômes trigonométriques). Déduire de l'exemple 2 les coefficients de Fourier d'une fonction constante C, ainsi que ceux de $C_k(t) = \cos(\omega kt)$ et $S_k(t) = \sin(\omega kt)$ pour $k > 0$.

Exemple 5 (Signal rectangulaire). Lorsque n est entier, que vaut $\cos(n\pi)$? $\sin(n\pi)$?

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels, 2π–périodique, impaire et telle que $\forall x \in \,]0\,;\pi[,\ f(x) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n\pi) = 0$. Représenter f et calculer ses coefficients de Fourier.

Remarque 5. Il arrive qu'il soit plus simple de calculer

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}\,dt$$

et d'en déduire : $a_0(f) = c_0(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i\big(c_{-n}(f) - c_n(f)\big)$.

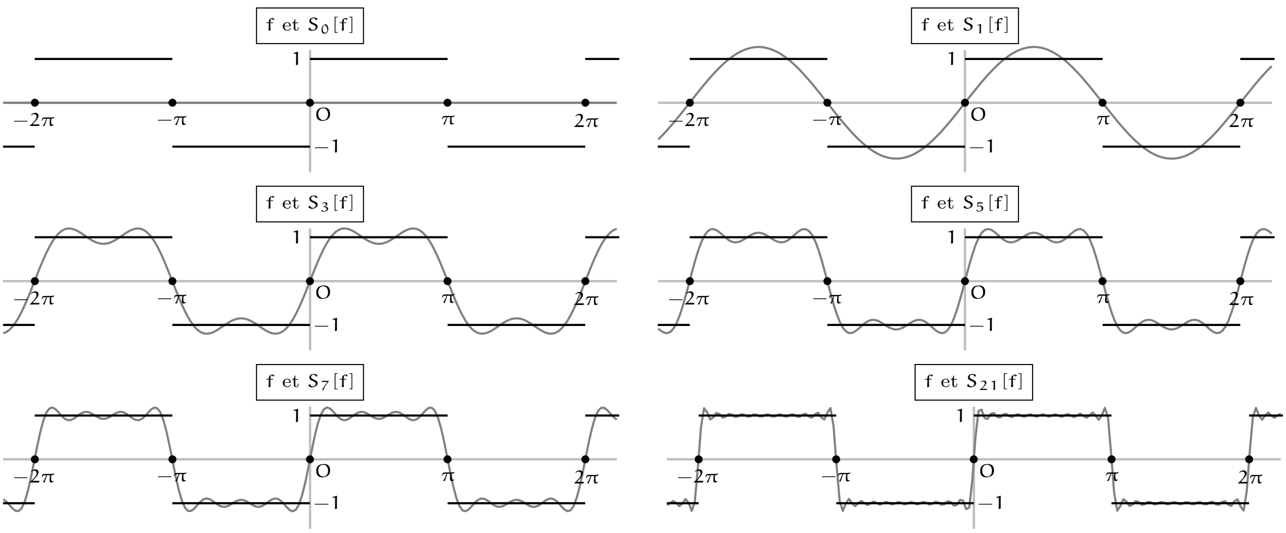
2.2 Série de Fourier d'une fonction

Définition 3. Soit f une fonction T–périodique, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La *série de Fourier* de la fonction f évaluée en $x \in \mathbb{R}$ est :

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\big)$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit aussi la somme partielle $S_N[f](x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\big)$.

Exemple 6. On a représenté ici la fonction f de l'exemple 5 et les premiers termes de la suite des sommes partielles de sa série de Fourier :



3. Convergence ponctuelle d'une série de Fourier

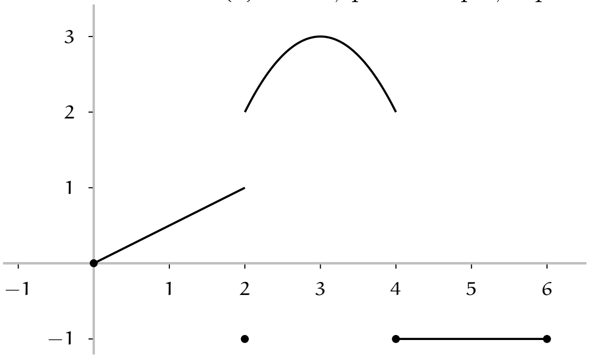
3.1 Théorème de Dirichlet

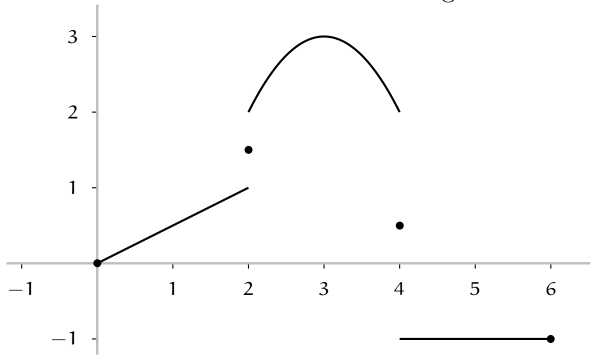
DÉFINITION 4. Soit u une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert I. La régularisée de u est la fonction $\tilde{u}$ définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ \tilde{u}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x^+} u(t) + \lim_{t \to x^-} u(t)\right) = \frac{u(x^+) + u(x^-)}{2}$$

REMARQUE 6. En particulier, si u est continue sur I, on a $\tilde{u} = u$.

En un point x de discontinuité, la valeur de la régularisée $\tilde{u}(x)$ est la moyenne de la limite à gauche et la limite à droite en x de $u(t)$. On a, par exemple, représenté à gauche une fonction u et à droite sa régularisée $\tilde{u}$:





THÉORÈME 1. DIRICHLET

Soit f une fonction T–périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La série de Fourier de f converge ponctuellement vers la régularisée de f :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S[f](x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x^+} f(t) + \lim_{t \to x^-} f(t)\right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}}$$

REMARQUE 7. Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue en x, $S[f](x) = f(x)$. En revanche, si f n'est pas continue en x, il se peut que f diffère de sa série de Fourier : $S[f](x) \neq f(x)$.

Démonstration. On se propose de montrer un cas particulier du théorème : lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et de période 2π, pour tout x la série de Fourier $S[f](x)$ converge et $S[f](x) = f(x)$.

Soit x est un réel fixé et n un entier naturel non nul. On pose $S_n(x) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_n(f)\cos(kx) + b_n(f)\sin(kx)\right)$.

On considère la fonction D_n, appelée noyau de Dirichlet : $D_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

① Vérifier que D_n est paire, 2π–périodique et que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$.

② Démontrer que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-u)\,du - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)\,dt = S_n(x) - f(x)$

③ Pourquoi a-t-on $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(x-u)\,du = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u)D_n(x-u)\,du$?

④ En posant $t = x - u$, vérifier que $S_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)D_n(t)\,dt$.

⑤ Justifier que $\varphi :]0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{f(x-t) - f(x)}{2\sin(t/2)}$ se prolonge en 0 en une fonction $\mathcal{C}^1$.

⑥ Montrer : $\forall t \in]-\pi;\pi[,\ D_n(t) = \dfrac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)}$. En déduire : $S_n(x) - f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin\big((n+1/2)t\big)\,dt$.

⑦ Montrer en intégrant par parties que $|S_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{M}{n+1/2}$ avec un $M > 0$. Conclure. □

Exemple 7. Avec la fonction f de l'exemple 5, montrer : $S[f] = f$.

3.2 Applications

Méthode 1.

On peut obtenir des valeurs remarquables de séries numériques en évaluant des séries de Fourier en des valeurs de x pertinentes, et en utilisant le théorème 1 de Dirichlet.

Exemple 8. À l'aide de la série de l'exemple 5, établir la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Remarque 8. On admet que sous les hypothèse du théorème de Dirichlet (f fonction T–périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), l'intégrale de a à b d'une fonction f s'obtient en intégrant terme à terme sa série de Fourier.

4. Convergence en moyenne quadratique d'une série de Fourier

4.1 Théorème de Parseval

Théorème 2. Parseval

Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de terme général $|a_n(f)|^2$ et celle de terme général $|b_n(f)|^2$ sont convergentes et on a :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)}$$

Remarque 9 (Interprétation géométrique). Il s'agit d'une généralisation du théorème de Pythagore. On généralise pour le montrer l'interprétation de l'intégrale comme produit scalaire (section 1.3). La théorie développée autour de cette généralisation est la théorie des espaces pré-hilbertiens.

L'égalité de Parseval est donc une généralisation du théorème de Pythagore.

Exemple 9. À partir de la série de l'exemple 5, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

⚠ méthode classique : on pourra écrire la série comme la somme de deux séries, l'une contenant ses termes d'indice pairs $n = 2p$, l'autre ses termes d'indice impairs $n = 2p+1$ et exprimer la série des termes pairs en fonction de la série de départ.

TD du § 18

Exercice 1. Coefficients de Fourier

Donner la série de Fourier de la fonction

① $f : x \mapsto \sin^2(x)$
② $f : x \mapsto |\sin x|$
③ $f : x \mapsto \min(\cos(2x), \sin(2x))$
④ f 2–périodique, paire, affine sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$

Exercice 2. Série de Fourier d'un signal rectangulaire ATS 2013

On considère la fonction 2π–périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Représenter f, et donner sa série de Fourier. La série de Fourier est-elle égale à f ? Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 3. Série de Fourier de la valeur absolue ATS 2013

Donner le développement en série de Fourier de la fonction $f : [-2\,;2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.

Exercice 4. Série de Fourier d'un trinôme ATS 2013

Soit la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

① Représenter f.
② Déterminer sa série de Fourier.
③ Calculer la somme des séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5. Série de Fourier et cosinus hyperbolique

Soient un réel $\lambda > 0$ f et la fonction 2π–périodique définie par $\forall x \in]-\pi\,;\pi],\ f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$.

① Représenter graphiquement f.
② Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
③ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}$,
④ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}$.

Exercice 6. Inégalité de Wirtinger

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, 2π–périodique.

① Exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction de ceux de sa dérivée f'.
② Montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ alors on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(f(t)\big)^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} \big(f(t)'\big)^2\,dt$.
③ Étudier les cas d'égalité.

Exercice 7. Convergence absolue de la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, 2π–périodique.

On note $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ les coefficients de Fourier de f des termes en cosinus de la série.

① Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$.
Majorer de même les coefficients de Fourier des termes en sinus de la série de Fourier de f.
② Montrer que pour tout x réel, la série de Fourier de f évaluée en x converge absolument.

Exercice 8. Somme des n-ièmes coefficients de Fourier, divisés par n

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodique.

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement (b_n)) les coefficients de Fourier en cosinus (respectivement en sinus) de sa série de Fourier.

Démontrer que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n}$ convergent.

Exercice 9. Série de Fourier de la partie positive du sinus Écrits ATS 2000

On note f la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$, et telle que $\begin{cases} f(x) &= 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \pi \\ f(x) &= -\sin x & \text{si } \pi \leqslant x < 2\pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est notée $S_f(x)$, avec $S_f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$.

Partie A.

① Calculer a_0, a_1 et b_1.

② Montrer que si $n \geqslant 2$, $b_n = 0$, et calculer a_n en distinguant le résultat selon que n est pair ou impair. Écrire la série de Fourier de f.

③ Justifier que $f(\pi) = S_f(\pi)$, et en déduire la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

④ Quelle est la série de Fourier de $g(x) = f(x) + \dfrac{\sin x}{2}$? Donner une expression plus simple de g.
Montrer que g est paire et la représenter graphiquement sur $\mathbb{R}$.

Partie B.

Soit plus généralement h, de période 2π continue de classe $\mathcal{C}^1$ par intervalles et telle que $h(0) = h(2\pi)$. On note $a_n(h), b_n(h)$ les coefficients de Fourier de h et $a_n(h'), b_n(h')$ ceux de la dérivée h'.

① Montrer que $a_0(h') = 0$.
À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si $n \geqslant 1$, $a_n(h') = nb_n(h)$ et $b_n(h') = -na_n(h)$.

② On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} [h'(x)]^2 \, dx$ converge.

En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2[a_n^2(h) + b_n^2(h)]$ est convergente.

Calculer sa somme en donnant le résultat à l'aide d'une intégrale.

③ Justifier que ces résultats s'appliquent à la fonction f.

Donner les valeurs de la somme des séries $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2-1)^2}$.

Exercice 10. Signal en dents de scie et sommes des sinus cardinaux d'entiers écrit ATS 2011

Soit f la fonction impaire et 2π–périodique telle que : $\forall x \in]0\,;2\pi[,\ f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

① On suppose de plus que f est définie sur $\mathbb{R}$. En déduire $f(0)$.

② Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$. On précisera sur cette figure la valeur de f aux points de discontinuité.

③ Calculer la série de Fourier de f. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire et 2π–périodique telle que : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;1],\ g(x) = xf(1) \\ \forall x \in]1\,;\pi],\ g(x) = f(x) \end{cases}$.

④ Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$.

⑤ Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\sin(nx)dx$, puis $\displaystyle\int_0^{\pi} \big(g(x) - f(x)\big)\sin(nx)dx$. En déduire la série de Fourier de g.

⑥ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}$.

⑦ Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$. Exprimer ces sommes à l'aide de π.

⑧ En appliquant la relation de Parseval à la fonction g, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}$.

Bilan du § 18

Prérequis

① Complexes : linéarisation des fonctions trigonométriques §2 Complexes . . . . ☐
② Intégration sur un segment : surtout l'intégration par parties §12 Intégration . . . . ☐
③ Séries numériques : §15 Séries numériques . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① connaître par cœur les formules des coefficients de Fourier (définition 2 et remarque 2) . . . . ☐
② invariance de l'intégration sur une période d'une fonction périodique (remarque 3) . . . . ☐
③ connaître l'impacte de la parité sur les coefficients de Fourier (remarque 4) . . . . ☐
④ connaître (hypothèses comprises) le théorème 1 de Dirichlet . . . . ☐
⑤ connaître (hypothèses comprises) le théorème 2 de Parseval . . . . ☐
⑥ savoir utiliser ses théorèmes pour calculer des séries numériques (exemples 8 et 9) . . . . ☐

Objectifs secondaires

① connaître les hypothèses d'intégration terme à terme d'une série de Fourier (remarque 8) . . . . ☐
② comprendre la notion de produit scalaire (section 1.3, sera approfondie au chapitre §23) . . . . ☐

Approfondissement

① comprendre la démonstration du théorème 1 de Dirichlet . . . . ☐