§ 17 : Déterminants

1. Le déterminant : une forme multilinéaire alternée

1.1 Notion de déterminant

Notation 1. Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n et $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. On note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

Exemple 1. ✎ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. Que vaut A_{13} ? A_{11} ?

Définition 1. Le *déterminant* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un nombre $\det(A) \in \mathbb{K}$, défini une relation de récurrence sur la taille n de la matrice A :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \text{ où } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

pour $n \geqslant 2$, et par $\det(A) = a$ si $n = 1$ et $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$.

Notation 3. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$

Exemple 2. ✎ Vérifier que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Exemple 3. ✎ Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure.
Montrer par récurrence sur n que $\det(T)$ est le produit des coefficients diagonaux de T. Que vaut $\det(\mathrm{Id}_n)$?

1.2 Caractère alterné

Proposition 1. Caractère alterné

Lorsqu'on permute deux colonnes d'une matrice carrée, son déterminant change de signe.

Si une matrice carrée a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul.

Démonstration. On démontre par récurrence la propriété le cas où $j = i+1$, pour $n \geqslant 2$:

⋆ initialisation : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$: la propriété est vraie au rang 2.

⋆ transmission : on suppose la propriété vraie au rang n, et on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A' la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et $j = i+1$.

Ainsi, pour $k \neq i, j$ on a par hypothèse $\det(A'_{1k}) = -\det(A_{1k})$, et donc : $(-1)^k a'_k \det(A'_{1k}) = -(-1)^k a_k \det(A_{1k})$.

On a aussi : $(-1)^i a'_{1i} \det(A'_{1i}) + (-1)^{i+1} a'_{1,i+1} \det(A'_{1,i+1}) = (-1)^i a_{1,i+1} \det(A_{1,i+1}) + (-1)^{i+1} a_i \det(A_i) = -((-1)^{i+1} a_{1,i+1} \det(A_{1,i+1}) + (-1)^i a_i \det(A_i))$. D'où :

$$\det(A') = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k} a'_{1j} \det(A'_{1k}) = -\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k} a_{1j} \det(A_{1k}) = -\det(A).$$

⋆ conclusion : permuter deux colonnes consécutives d'une matrice change le signe de son déterminant.

Pour permuter les colonnes i et j (avec $i < j$), on effectue $j-i$ permutations du type $p_{k,k+1}$, pour $k = i, \dots, j-1$, suivies de $j-i-1$ permutations du type $p_{k,k+1}$ pour $k = j-2, \dots, i$. On a au final un nombre impair de permutations consécutives, donc un changement de signe.

La deuxième partie de la proposition vient du fait qu'en permutant deux colonnes identiques de A, on obtient $\det(A) = -\det(A)$ □

Exemple 4. ✎ Calculer : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Exemple 5. ✎ Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Remarque 1. La proposition 1 s'interprète en terme d'opérations élémentaires :

Si $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, la matrice de permutation $p_{ij} = \mathrm{Id}_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ vérifie donc

$$\det(A\,p_{ij}) = -\det(A) \text{ et } \det(p_{ij}) = -1$$

1.3 Multilinéarité du déterminant

Proposition 2. Caractère multilinéaire

Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes :

$$\det(\dots, \lambda C_j' + C_j'', \dots) = \lambda \det(\dots, C_j', \dots) + \det(\dots, C_j'', \dots)$$

On dit que le déterminant est une application n-linéaire.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.

⋆ initialisation : le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est égal à son unique coefficient : il s'agit d'une application linéaire.

⋆ transmission : on suppose que le déterminant de matrices d'ordre n est n-linéaire, on va montrer que le déterminant de matrices d'ordre $n+1$ est $n+1$-linéaire.

Soient les vecteurs $c_1, \dots, c_{j-1}, c_j', c_j'', c_{j+1}, \dots c_n$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ et les matrices $C = (\dots, \lambda c_j' + c_j'', \dots)$, $C' = (\dots, c_j', \dots)$ et $C'' = (\dots, c_j'', \dots)$. Si $j \in [\![1\,;n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \left[\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k c_{1k} \det(C_{1k})\right] + (-1)^j(\lambda c_j' + c_j'')\det(C_{1j}) + \left[\sum_{k=j+1}^{n+1} (-1)^k c_{1k} \det(C_{1k})\right] \\
&= \left[\sum_{k \neq j} (-1)^k c_{1k} (\lambda \det(C_{1k}') + \det(C_{1k}''))\right] + \lambda(-1)^j c_j' \det(C_{1j}') + c_j'' \det(C_{1j}'') \text{ car } C_{1j}' = C_{1j} = C_{1j}''. \\
&= \lambda \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k c_{1k}' \det(C_{1k}')\right] + \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k c_{1k}'' \det(C_{1k}'')\right] \text{ en posant pour } k \neq j,\ c_k' = c_k'' = c_k.
\end{aligned}$$

$\det(C) = \lambda \det(C') + \det(C'')$.

⋆ conclusion : le déterminant des matrices d'ordre n est n-linéaire. □

Remarque 2. En conséquence, une matrice carrée dont une colonne est nulle est de déterminant nul.

Remarque 3 (Dilatations). Lorsqu'on multiplie une colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\alpha \in \mathbb{K}$, son déterminant est multiplié par α.

Si $i \in [\![1\,;n]\!]$, la matrice de dilatation $d_i(\alpha) = \mathrm{Id}_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ vérifie donc

$$\det(A\, d_i(\alpha)) = \alpha \det(A) \text{ et } \det(d_i(\alpha)) = \alpha$$

Remarque 4 (Transvections). Ajouter à une colonne d'une matrice carrée un multiple d'une autre de ses colonnes ne change pas son déterminant.

Pour $(i, j, \alpha) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;n]\!] \times \mathbb{K}$ on définit la matrice de transvection $t_{ij}(\alpha) = \mathrm{Id}_n + \alpha E_{ji}$. On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A\, t_{ij}(\alpha)) = \det(A) \text{ et } \det(t_{ij}(\alpha)) = 1$$

Exemple 6. ✎ Calculer le déterminant suivant, en se ramenant à un déterminant triangulaire : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Déterminant et produit

2.1 Déterminants nuls

Proposition 3. Reconnaître un déterminant nul

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Dans les cas suivants, on a $\det(A) = 0$:
- ⋆ si A a une colonne nulle.
- ⋆ si une colonne de A est combinaison linéaire des autres.
- ⋆ si la matrice A n'est pas inversible.
- ⋆ si le rang de la matrice A est inférieur ou égal à $n - 1$. (les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{K}^n$).
- ⋆ si la famille des colonnes de A est liée.

Démonstration. Le premier point vient de la multilinéarité, qui implique, lorsqu'une colonne est nulle : $\det(A) = \det(A) + \det(A)$ donc $\det(A) = 0$.

Le second point vient de l'invariance du déterminant par transvection et du premier point.

Les quatre derniers points sont équivalents au second. □

Exemple 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer $\det(A)$.

La proposition 5 nous permettra d'établir la réciproque :

Proposition 4. Caractérisation des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $\det(A) \neq 0$
- ⋆ $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: A est une matrice inversible
- ⋆ $\mathrm{rg}(A) = n$: le rang de A, qui est la dimension du sous-espace engendré par ses colonnes, vaut n.
- ⋆ les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.
- ⋆ l'endomorphisme canoniquement associé à A est un automorphisme.

2.2 Multiplicativité du déterminant

Proposition 5. Multiplicativité du déterminant

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On a : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Si l'un des facteurs n'est pas inversible, disons $A \notin GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = 0$. On a aussi AB non inversible, sinon $AB(AB)^{-1} = \mathrm{Id}_n$ de sorte que $A^{-1} = B(AB)^{-1}$: contradiction. Donc $0 = \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dans le cas ou $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$, on a vu que la propriété était vraie si B est la matrice d'une opération élémentaire (remarques 1, 3 et 4).On a vu dans le §9 matrices que toute matrice inversible est le produit de matrices d'opérations élémentaires. On en déduit la propriété attendue. $\square$

Remarque 5. En conséquence, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ et plus généralement $\det(A^n) = \big(\det A\big)^n$.

2.3 Invariance par transposition

Proposition 6. Invariance du déterminant par transposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a : $\det(A) = \det({}^tA)$.

En conséquence, toute propriété valable sur les colonnes d'un déterminant, l'est aussi sur les lignes.

Démonstration. Si A n'est pas inversible, $\det(A) = 0$ et ${}^tA$ n'est pas inversible non plus, donc $\det\left({}^tA\right) = 0$.

Si A est une matrice d'opérations élémentaire, sa transposée est une matrice d'opération élémentaire de même déterminant. Ainsi, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ étant le produit de matrices d'opérations élémentaires, la proposition 5 permet de conclure. $\square$

Proposition 7. Développement suivant une ligne ou une colonne

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a pour tous $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) \text{ et } \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

La première formule est le développement du déterminant suivant la i-ème ligne, la seconde, le développement suivant la j-ème colonne.

Démonstration. C'est une conséquence de la définition 1, de la proposition 1 (sur les permutations) et de l'invariance par transposition du déterminant (proposition 6). $\square$

Remarque 6. En pratique, on trouve le signe $(-1)^{i+j}$ à l'aide du schéma suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

Exemple 8. ✎ On note $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont (c_1, c_2, c_3). Vérifier la cohérence des définitions avec celles du chapitre §8 (Géométrie dans l'espace) : $[c_1, c_2, c_3] = (c_1 \wedge c_2) \cdot c_3 = \det(C)$.

3. Exemples et applications

3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On se donne $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Le déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u_i dans $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n)\big)$$

Exemple 9. ✎ Soit, avec les notations de la définition 2, $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Montrer que $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det(P)^{-1}\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

Remarque 7. Avec les mêmes notations, $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Exemple 10. ✎ On rappelle que deux matrices A et B carrées d'ordre n sont semblables si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Vérifier que deux matrices semblables ont même déterminant.

Montrer avec la matrice nulle et la matrice E_{11} que la réciproque est fausse.

Définition 3. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Le déterminant de f est le nombre $\det(f) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)$ où $\mathcal{B}$ est une base de E.

Le déterminant de f ne dépend pas de la base choisie. Il est non nul si et seulement si f est un automorphisme.

Démonstration. En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, on a : $A' = P^{-1}AP$. Ainsi $\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$.

L'endomorphisme f est un endomorphisme si sa matrice dans une base est inversible, ce qui équivaut au fait que son déterminant soit non nul. □

3.3 Systèmes de Cramer

Proposition 8 (Hors programme). Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t\tilde{A}$ où $\tilde{A} = \big((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Démonstration. La coordonnées (i, j) du produit $A{}^t\tilde{A}$ est par définition : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\det\big(A_{jk}\big)$.

Soit $i = j$ et on reconnaît le développement de $\det(A)$, soit $i \neq j$ et on a le développement d'un déterminant ayant deux colonnes identiques, donc valant 0. Finalement, $A{}^t\tilde{A} = \det(A)\mathrm{Id}_n$ ce qui permet de conclure. □

Exemple 11. ✎ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $ad - bc \neq 0$. Donner A^{-1} en fonction de a, b, c et d.

Définition 4. Un système d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ est appelé système *de Cramer* si et seulement s'il admet une solution unique.

Proposition 9.

Un système est de Cramer si et seulement s'il est carré et si $\det(A) \neq 0$ où A est la matrice de ses coefficients.

Dans ce cas, si $\det A \neq 0$ et $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $B \in K^n$, alors $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur B.

Démonstration. La méthode du pivot montre qu'un système a une solution unique si et seulement si le nombre de colonnes de A égale son nombre de lignes et le nombre de pivot, ce qui équivaut à A carrée d'ordre n et de rang n, ou encore A carrée et $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $X = A^{-1}B$, et on conclut avec la proposition 8. ☐

REMARQUE 8. La proposition précédente a surtout une portée théorique, en pratique, la méthode du pivot reste plus efficaces pour la résolution d'un système.

3.4 Déterminant de matrice bloc triangulaire

PROPOSITION 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Le déterminant qui suit est dit déterminant d'une matrice bloc triangulaire supérieure :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{pn} & D \end{array}\right) = \det(A)\det(D)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la taille n de la matrice bloc A. ☐

REMARQUE 9. Cette formule ne se généralise pas à une matrice bloc non triangulaire.

BILAN DU § 17

Objectifs prioritaires

① définition 1 et développement relativement à une ligne ou colonne (proposition 7) .... ☐

② savoir utiliser les opérations élémentaires pour calculer un déterminant .... ☐

- (a) savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire : exemple 3 .... ☐
- (b) savoir reconnaître un déterminant nul (proposition 3) .... ☐
- (c) propositions 1 (permutations), remarques 3 (dilatations) et 4 (transvections) .... ☐
- (d) exercices 1 et 2 .... ☐

③ connaître le déterminant d'un produit : proposition 5 .... ☐

④ connaître le déterminant d'une transposée : proposition 6 .... ☐

⑤ savoir interpréter le déterminant d'une famille de vecteurs (section 3.1, exercice 9).................... ☐

⑥ savoir interpréter le déterminant d'un endomorphisme (section 3.2, exercices 11 et 10)................ ☐

Objectifs secondaires

① savoir calculer des déterminants d'ordre n (exercices 3).. ☐

② connaître le calcul de déterminants triangulaires par blocs (section 3.4).............................. ☐

Approfondissement

① connaître le lien entre déterminant et matrice inverse (proposition 8) .... ☐

② connaître le lien entre déterminant et système de Cramer (proposition 9)............................ ☐

TD du § 17

Exercice 1. Déterminants numériques

Calculer le déterminant :

① $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Exercice 2. Déterminants finis à paramètres

Donner une expression factorisée du déterminant suivant :

① $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ② $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. ③ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+2x \end{vmatrix}$ où $x \in \mathbb{C}$

④ $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n+1}{0} & \binom{n+2}{0} & \binom{n+3}{0} \\ \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} & \binom{n+4}{1} \\ \binom{n+2}{2} & \binom{n+3}{2} & \binom{n+4}{2} & \binom{n+5}{2} \\ \binom{n+3}{3} & \binom{n+4}{3} & \binom{n+5}{3} & \binom{n+6}{3} \end{vmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$. ⑤ $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3. Déterminants d'ordre n

Calculer le déterminant suivant :

① $S_n = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{vmatrix}$ où $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$. ② $\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$ de taille $n \in \mathbb{N}^*$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Déterminant de Vandermonde

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $n \geqslant 2$.

On considère le déterminant de Vandermonde d'ordre n : $V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

On souhaite démontrer que $V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Démontrer la formule par récurrence sur n. Lors de la transmission, on ajoutera à chaque colonne, en commençant par la dernière, un multiple astucieusement choisi de la précédente.

Exercice 5. Inversibilité d'une matrice à paramètre

Pour quelles valeurs du réel m la matrice suivante est–elle inversible ? Donner son rang en fonction de m.
$\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Divisibilité et déterminant

Sachant que 13 divise 6591, 2626, 1352 et 4004, montrer que 13 divise $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Exercice 7. Déterminant et alignement dans le plan

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Montrer que les points $M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $M''(x'';y'')$ sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 8. Déterminants d'une matrice antisymétrique

① Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre 3 est nul.
Est-ce le cas pour les matrice antisymétriques d'ordre 2 ?

② Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\det(-A)$?

③ En déduire qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair est de déterminant nul.

Exercice 9. Déterminant d'une base de l'espace

Soit la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ où les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ de u, v et w sont

$$u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad w\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 10. Déterminants et automorphisme polynomiale

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \; P \mapsto (X-1)^2 P'' + (\lambda X + 1)P' + P$$

soit un automorphisme.

Exercice 11. Déterminants et automorphisme de l'espace

Soit $m \in \mathbb{R}$ et φ_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que φ_m soit un automorphisme.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\varphi_m$ et $\mathrm{Im}\varphi_m$ dans les cas où φ_m n'est pas un automorphisme.