§ 16 : Séries numériques

1. Définition et exemples

1.1 Notion de série

Définition 1 (Série). Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. La *série* de terme général u_n est la suite (S_n) définie par :

$$\forall N \geqslant n_0,\ S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

Le terme S_N est la *somme partielle d'indice* N de la série. La série elle–même est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Définition 2. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est *convergente* si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. Dans ce cas, la limite des sommes partielles est appelée la *somme* de la série, et notée

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Le *reste* d'une série convergente de somme S est la suite de terme général $(R_n) = (S - S_n)$.

Si la série ne converge pas, elle est dite *divergente.*

Étudier la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Exemple 1. ✎ Calculer les sommes partielles de la série de terme général n, et vérifier qu'elle diverge.

Proposition 1 (Séries et opérations). Muni des opérations d'addition et de multiplication externe des suites, l'ensemble des séries convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Démonstration. ✎ On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites. □

Exemple 2. ✎ Montrer par un exemple que la somme de deux séries divergentes peu en revanche converger.

Remarque 1. Les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant m_0} u_n$ sont de même nature : leurs sommes partielles diffèrent d'une constante fixée $C = u_{n_0} + \cdots + u_{m_0-1}$ (si $m_0 > n_0$).

1.2 Séries géométriques

Proposition 2. Séries géométriques

La série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$, où α est un réel ou un complexe, est une *série géométrique.*

La série géométrique converge si et seulement si $|\alpha| < 1$. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$.

Démonstration. ✎ Rappeler l'expression des sommes partielles de la série géométrique, et conclure. □

1.3 Séries de Riemann

Proposition 3. Séries de Riemann

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha>1$ (et divergente si $\alpha\leqslant 1$).
En particulier, pour $\alpha=1$, la série dite *harmonique* est divergente.

Démonstration. ✎ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que :

① Montrer que si $\alpha\leqslant 0$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\alpha}\geqslant 1$. En déduire $S_n\geqslant n$ et que la série diverge.

② Si $\alpha>0$, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\leqslant\frac{1}{n^\alpha}$.

③ En déduire : $S_{n+1}-1\leqslant\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\leqslant S_n$, puis que (S_n) diverge lorsque $0<\alpha<1$ ou $\alpha=1$.

④ Si $\alpha>1$, montrer que (S_n) est croissante et majorée et conclure. □

2. Séries à termes positifs

2.1 Alternative du comportement d'une série positive

Définition 3. La série $\sum u_n$ est à *termes positifs* (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_n\geqslant 0$ (pour $n\geqslant n_0$).

Remarque 2. Par définition, les sommes partielles d'une série à termes positif $\sum u_n$ forment une suite croissante. Ainsi, une série à termes positifs est soit :

⋆ convergente vers une limite ℓ (si la suite des sommes partielles est majorée).
⋆ divergente vers $+\infty$ (si la suite des sommes partielles n'est pas majorée).

2.2 Comparaisons de séries à termes positifs

Proposition 4. Comparaisons de séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang.
Si à partir d'un certain rang on a $u_n\leqslant v_n$ ou $u_n=o(v_n)$. Alors :

⋆ si (v_n) converge, alors (u_n) converge.
⋆ si (u_n) diverge, alors (v_n) diverge.

Démonstration. On obtient un encadrement des sommes partielles et on utilise le théorème d'encadrement. □

Exemple 3. Ce critère est souvent utilisé en lien avec les séries géométriques ou les séries de Riemann.

Étudier la convergence de $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2\ln(n)}$.

Étudier la convergence de $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$. Montrer que $S=1+\dfrac12\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n}$. En déduire : $S=2$.

2.3 Séries et équivalents

Proposition 5. Séries à termes positifs équivalents

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si $u_n\sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $u_n \sim v_n \iff v_n - u_n = o(u_n)$, si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge, par comparaison : $\sum(v_n - u_n)$ converge. Par somme, $\sum v_n = \sum u_n + \sum(v_n - u_n)$ converge aussi. □

EXEMPLE 4. Étudier la nature des séries : ① $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{1}{n}$ ② $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2\left(e^{\frac{1}{2n^2}} - \operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)$

2.4 Convergence absolue

DÉFINITION 4. Une série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si $\sum |u_n|$ converge.
La série $\sum u_n$ est dite *semi-convergente* si elle converge sans être absolument convergente.

PROPOSITION 6.

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, notons S la somme de $\sum |u_n|$. On définit pour tout n : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Les séries de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont à termes positifs et leurs sommes partielles sont majorées par S, donc elles convergent. Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ est le terme général d'une série convergente. □

EXEMPLE 5. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(n^2)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. Méthodes d'étude

3.1 Critère suffisant de divergence

PROPOSITION 7. CRITÈRE DE DIVERGENCE

Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle *diverge grossièrement.*

Démonstration. Si $\sum u_n$ converge, la suite de ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ converge vers $S \in \mathbb{C}$.
D'où $u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$: (u_n) converge vers 0. □

REMARQUE 3. ⚠ la réciproque est fausse. Par exemple, $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ alors que $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3.2 Séries télescopiques

PROPOSITION 8. LIEN ENTRE SUITE ET SÉRIE

La suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} a_{n+1} - a_n$ converge.

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n+1} - a_n = (\lim a_n) - a_{n_0}$. (une série sous la forme $\sum a_{n+1} - a_n$ est dite *télescopique*).

Démonstration. On montre par récurrence que $\forall n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} - a_n = a_{N+1} - a_{n_0}$. □

EXEMPLE 6. ✎ Convergence et calcul de : ① $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ ② $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

3.3 Séries alternées

Proposition 9. Critère spécial de Leibniz

Si (u_n) est une suite décroissante, et de limite nulle, alors les séries $\sum(-1)^n u_n$ et $\sum(-1)^{n+1}u_n$ sont convergentes. Ces séries sont dites *alternées.*

Démonstration. ✎ Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifiant les deux conditions, $p_n = \sum_{k=n_0}^{2n}(-1)^k u_k$ et $i_n = \sum_{k=n_0}^{2n+1}(-1)^k u_k$ les sommes partielles d'indices pairs et impairs. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes et conclure. □

Exemple 7. Vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Remarque 4. La démonstration de la proposition 9 prouve que la somme S d'une série alternée est encadrée par deux sommes partielles consécutive, donc que le reste $|S-S_n|$ est majoré par u_{n+1}.

3.4 Critère de d'Alembert

Proposition 10. Critère de d'Alembert

Si les termes de la série $\sum u_n$ sont non nuls et si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$:

- ⋆ lorsque $0\leqslant \ell < 1$: $\sum u_n$ converge absolument.
- ⋆ lorsque $\ell > 1$: $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- ⋆ lorsque $\ell = 1$: le critère ne permet pas de conclure.

Démonstration. Si $\ell \in [0;1[$, il existe un réel r tel que $\ell < r < 1$. À partir d'un certain rang n_0, $|u_{n+1}| \leqslant r|u_n|$, donc par récurrence : $|u_n| \leqslant Cr^{n-n_0}$ où $C = \max_{n\leqslant n_0}|u_n|$. Par la proposition de comparaison 4, et le résultat sur les suites géométriques, $\sum u_n$ converge absolument. On en déduit le cas $\ell > 1$ en considérant $v_n = 1/u_n$.
□

Exemple 8. ✎ Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}$.

3.5 Comparaison avec une intégrale

Proposition 11 (Comparaison avec une intégrale). Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[n_0;+\infty[$. Alors : $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ existe.

Démonstration. Généralise la démonstration de la proposition 3. □

Exemple 9. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n\ln(n)}$.

3.6 Méthodes de calcul

Méthode 1.

On dispose des méthodes suivantes pour obtenir une somme :

① utiliser les sommes géométriques.

② obtenir une relation de récurrence entre les sommes partielles, puis une équation sur la somme.

③ utiliser les sommes télescopiques.

④ utiliser les théorèmes de Dirichlet ou Parseval du §18 Séries de Fourier.

⑤ utiliser l'évaluation ou le théorème de continuité du §20 Séries entières.

TD du § 16

Exercice 1. Nature de séries numériques

Étudier la convergence de la série

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. ④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$

⑤ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ ⑥ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ⑦ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ⑧ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$

Exercice 2. Calcul de séries numériques

Établir la convergence et calculer la somme de la série numérique

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$. ② $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ ④ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

Exercice 3. Nature d'une série

Déterminer la nature de la série de terme général

① $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ② $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}$ ③ $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ ④ $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 4. Somme d'une série ATS 2014

Établir la convergence et calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 5. Formule de Stirling

On cherche un équivalent de $n!$. On suppose connue la formule de Wallis (établie à partir de l'intégrale de Wallis) :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$.

① Montrer que la série de terme général u_n converge.
② En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel strictement positif noté L.
③ Calculer L en utilisant la formule de Wallis, à partir de l'expression : $\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$.
④ En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 6. Transformation et critère d'Abel

On souhaite démontrer le critère d'Abel :

Soit la série de terme général $u_n = a_n b_n$ où $(b_n)_n$ décroît vers 0, et les sommes partielles de la série de terme général (a_n) soient bornées ($\exists A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} : A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant A$). Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge.

① Montrer l'égalité de la transformation d'Abel (une intégration par parties pour les sommes) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1.$$

② Montrer que, sous les hypothèses du critère d'Abel, la série de terme général $A_k(b_k-b_{k+1})$ est absolument convergente. En déduire que la série de terme général u_k converge.
③ Déduire du critère d'Abel le critère de Leibniz : la série de terme général $(-1)^n|u_n|$ converge lorsque la suite $(|u_n|)_n$ décroît et converge vers 0.
④ Démontrer le théorème d'Abel : si une série de terme général $u_n \in \mathbb{C}$ converge, alors la série de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
⑤ Montrer que la série de terme général $\dfrac{\sin n\theta}{n}$, où $0 < \theta < \pi$, est une série convergente.

Bilan du § 16

Le plan d'étude classique de la convergence d'une série $\sum u_n$ est le suivant :

① si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ DV.

⚠ si u_n tend vers 0, on ne peut rien dire : la série peut diverger quand même (ex. série harmonique).

② on étudie la convergence absolue de la série.

(a) si $|u_{n+1}|/|u_n| \longrightarrow \ell < 1$ alors $\sum u_n$ CV absolument (d'Alembert : utile avec des !, des puissances).

(b) si $|u_n| \sim v_n$ ou $|u_n| = o(v_n)$ ou $|u_n| \leqslant v_n$ où v_n est le terme positif d'une série convergente (de Riemann ou géométrique, souvent), alors la série $\sum u_n$ CV absolument.

(c) si $u_n \sim v_n$ ou $v_n = o(u_n)$ ou $v_n \leqslant u_n$ où v_n est le terme positif d'une série divergente (de Riemann ou géométrique), alors $\sum u_n$ DV.

③ si la série n'est pas absolument convergente, elle peut converger tout de même :

(a) Si $u_n = (-1)^n v_n$ où (v_n) est une suite positive qui décroît vers 0, alors $\sum u_n$ CV (Leibniz).

(b) Si la suite des sommes partielles converge (par exemple, avec un télescopage), alors $\sum u_n$ CV.

Prérequis

① Suites numériques : tout ! §9 Suites . . . . ☐

② Développements limités : tout ! §7 Analyse asymptotique . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① connaître la définition 1 d'une série, de sa somme, des sommes partielles (section 1.1) . . . . ☐

② connaître la définition d'une série convergente, divergente . . . . ☐

③ connaître la définition et la nature d'une série géométrique : section 1.2 . . . . ☐

④ connaître la définition et la nature d'une série de Riemann : section 1.3 . . . . ☐

⑤ connaître le critère de convergence d'une série télescopique, savoir la calculer (section 3.2) . . . . ☐

⑥ connaître le critère de Leibniz des séries alternées : section 3.3 . . . . ☐

⑦ connaître le critère de comparaison des séries à termes positifs : section 2.2 . . . . ☐

⑧ connaître le critère par équivalence des séries à termes positifs : section 2.3 . . . . ☐

⑨ connaître la notion de convergence absolue 2.4 . . . . ☐

⑩ connaître le critère de divergence grossière : proposition 7 . . . . ☐

⑪ connaître le critère de d'Alembert : proposition 10 . . . . ☐

⑫ connaître les méthodes de calcul : section 3.6 et exercice 2 . . . . ☐

⑬ savoir utiliser les critères pour établir des convergences (exercices 2, 1) . . . . ☐

Objectifs secondaires

① Connaître le critère de comparaison avec une intégrale : 11 . . . . ☐

② Comprendre l'étude de la nature des séries de Riemann (section 1.3) . . . . ☐

Approfondissement

① connaître le résultat culturel de la formule de Stirling de l'exercice 5 . . . . ☐

② comprendre la démonstration du critère de Leibniz (section 3.3) . . . . ☐