

§ 14 : INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

1. Intégrale des fonctions en escalier

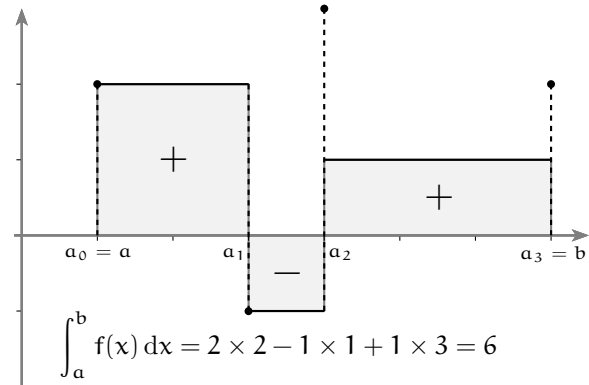
1.1 Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

NOTATION 1. Dans tout le chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

DÉFINITION 1. Une *subdivision* $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de l'intervalle $[a; b]$ est une suite finie, strictement croissante, d'extrémités a et b :

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b.$$

Une subdivision $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 0; m \rrbracket}$ est dite *plus fine* que $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ si $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \exists j \in \llbracket 0; m \rrbracket, a_k = \alpha_j$.



DÉFINITION 2. Une fonction f définie sur le segment $[a; b]$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ du segment $[a; b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_k; a_{k+1}[$ est constante (on note $f|_{]a_k; a_{k+1}[}$ cette fonction restreinte).

La subdivision est alors dite *adaptée* à la fonction f .

Une fonction définie sur un intervalle quelconque I est en escalier si elle est en escalier sur tout segment de I .

On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur un intervalle I .

REMARQUE 1. L'ensemble $\mathcal{E}([a; b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions : il contient la fonction constante nulle ($a_0 = a$ et $a_1 = b$ est une subdivision adaptée) et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in \mathcal{E}([a; b]) \times \mathcal{E}([a; b])$, soit $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ une subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à u et une subdivision adaptée à v . Sur chaque $]a_k; a_{k+1}[$, $\lambda u + v$ est constante car u et v le sont, donc $\lambda u + v \in \mathcal{E}([a; b])$.

L'ensemble des fonctions en escalier est aussi stable par produit interne (même preuve).

DÉFINITION 3. Soit $f \in \mathcal{E}([a; b])$ (avec $a < b$) et $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ on note c_k la valeur (constante) de f sur $]a_k; a_{k+1}[$. On définit l'intégrale entre a et b de f comme

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (a_{k+1} - a_k)$$

On adopte également les conventions suivantes :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \text{ et } \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

EXEMPLE 1. \curvearrowright soit $c \in \mathbb{R}$. À l'aide de la définition, démontrer que $\int_a^b c dx = (b-a)c$.

REMARQUE 2. Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'*unité* d'aire est l'aire du rectangle unité : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$. Lorsque $a < b$, l'intégrale de la définition 3 s'interprète comme l'*aire algébrique*, exprimée en unités d'aire, des rectangles délimités par l'axe des abscisses et la courbe de f (on ajoute l'aire des rectangles au dessus de l'axe des abscisses et on retranche l'aire des rectangles sous l'axe des abscisses).

1.2 Propriétés de l'intégrale

La définition de l'intégrale dans la section 1.1 d'une fonction en escalier permet de démontrer la proposition suivante pour des fonctions $u, v \in \mathcal{E}([a; b])$ en escalier. On obtiendra dans la section 2 la démonstration dans le cas continu par morceaux de cet énoncé :

PROPOSITION 1. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Soient u et v deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \leq b$.

① Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda u(x) + v(x)) dx = \lambda \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx.$

② Relation de Chasles : $\forall t \in [a; b], \int_a^b u(x) dx = \int_a^t u(x) dx + \int_t^b u(x) dx.$

③ Positivité : si $\forall x \in [a; b], u(x) \geq 0$, alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0.$

④ Croissance : si $\forall x \in [a; b], u(x) \leq v(x)$, alors $\int_a^b u(x) dx \leq \int_a^b v(x) dx.$

⑤ Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b u(x) dx \right| \leq \int_a^b |u(x)| dx$

⑥ Inégalité de la moyenne : si $\forall x \in [a; b], m \leq u(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b u(x) dx \leq M(b-a).$

Les propriétés ① et ② s'étendent au cas où $b \leq a$ et $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Cas de deux fonctions u et v en escaliers :

① : appliquer la définition 3 aux deux membres de l'égalité, avec une subdivision adaptée à la fois à u et v .

② : appliquer la définition 3 aux deux membres de l'égalité, avec une subdivision adaptée à u qui contient t .

③ : d'après la définition 3, puisque pour tout $k, a_{k+1} - a_k > 0$ et $c_k \geq 0$.

④ : appliquer la positivité ③ à $v - u$ puis la linéarité ①.

⑤ : d'après l'inégalité triangulaire usuelle appliquée dans la définition 3

⑥ : on applique la croissance ④ d'une part à $m \leq u$ et d'autre part à $u \leq M$. □

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 Fonctions continues par morceaux

DÉFINITION 4. Une fonction f définie sur le segment $[a; b]$ est une fonction *de classe \mathcal{C}^k par morceaux* s'il existe une subdivision $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ du segment $[a; b]$, telle que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_k; a_{k+1}[$ est de classe \mathcal{C}^k et se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^k de $[a_k; a_{k+1}]$.

La subdivision est alors dite *adaptée* à la fonction f .

Une fonction définie sur un intervalle quelconque I est de classe \mathcal{C}^k par morceaux si elle est de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur tout segment de I .

On note $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur un intervalle I .

PROPOSITION 2 (Approximation uniforme). Soit une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f_ε en escaliers qui majore, et approche uniformément, f sur l'intervalle $[a; b]$ à ε près :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}^0([a; b]), \forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in \mathcal{E}([a; b]) : \forall x \in [a; b], f_\varepsilon(x) \geq f(x) \geq f_\varepsilon(x) - \varepsilon$$

Démonstration. On considère d'abord une fonction f continue sur $[a; b]$. On construit une suite (finie ou infinie) (a_k) par récurrence : $a_0 = a$ et

- ★ si $\forall x \in]a_n; b]$, $|f(x) - f(a_n)| \leq \varepsilon$, on pose $a_{n+1} = b$ et la suite s'arrête.
- ★ sinon, on définit a_{n+1} comme la borne supérieure des $x > a_n$ tels $|f(x) - f(a_n)| \leq \varepsilon$.

Si la suite (a_n) est infinie, elle est croissante par définition, et majorée par b , donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \leq b$ (qui est supérieur à tous les a_n).

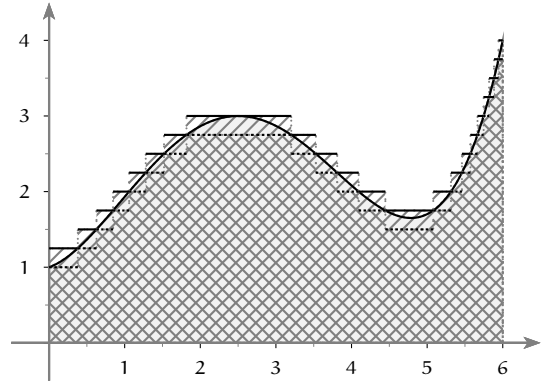
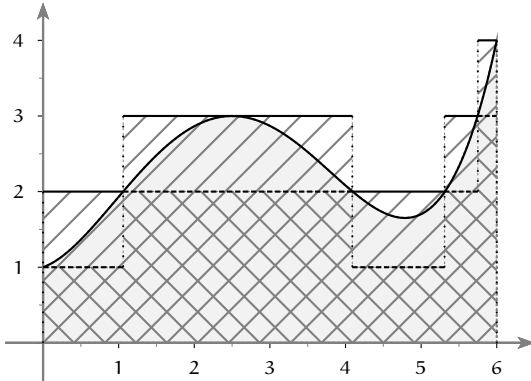
Comme f est continue en ℓ , $\exists \delta > 0 : \forall x \in [a; b]$ tel que $|x - \ell| < \delta$, on a : $|f(x) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Cet intervalle contient les termes de la suite (a_n) à partir d'un certain rang N , ce qui est contradictoire car $\forall x \in [a_N; \ell]$, $|f(a_n) - x| \leq |f(a_n) - f(\ell)| + |f(\ell) - f(x)| \leq \varepsilon$ donc $\ell \leq a_{N+1}$.

La suite est donc finie, il s'agit d'une subdivision à partir de laquelle on définit f_ε :

- ★ $f_\varepsilon(a_n) = f(a_n)$ pour tout n
- ★ sur $]a_n; a_{n+1}[$, $f_\varepsilon(x)$ est constante et égale au maximum de f sur $[a_n; a_{n+1}]$ (qui existe d'après le théorème du maximum d'une fonction continue).

Si f est continue par morceaux sur $[a; b]$ et que (b_k) est une subdivision adaptée de f , on construit f_ε sur $[b_k; b_{k+1}]$ comme précédemment à partir du prolongement continu à $[b_k; b_{k+1}]$ de $f|_{]b_k; b_{k+1}[}$. \square

EXEMPLE 2. Sur chacun des graphes, on a représenté une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0; 6])$, et deux fonctions en escaliers qui encadrent f et l'approchent à ε -près. ($\varepsilon = 1$ à gauche et $0,25$ à droite). Les aires hachurées correspondent aux intégrales des fonctions en escalier, l'aire grisée à l'intégrale de f .



DÉFINITION 5. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$. Soient

$$I^+(f, a, b) = \left\{ \int_a^b v(x) dx : v \in \mathcal{E}([a; b]), v \geq f \right\} \text{ et } I^-(f, a, b) = \left\{ \int_a^b u(x) dx : u \in \mathcal{E}([a; b]), u \leq f \right\}.$$

Si la borne inférieure i^+ de l'ensemble $I^+(f, a, b)$ et la borne supérieure i^- de l'ensemble $I^-(f, a, b)$ existent et sont égales, on dit que f est *intégrable* sur le segment $[a; b]$ et on pose $\int_a^b f(x) dx = i^+ = i^-$.

On étend l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes en posant : $\int f = \int \Re e(f) + i \int \Im m(f)$.

PROPOSITION 3.

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a; b]$ est intégrable.
Les résultats de la proposition 1 restent valables pour des fonctions $(u, v) \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}^0([a; b])$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}^0([a; b])$, la proposition 2 affirme qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) de fonctions de $\mathcal{E}([a; b])$ telles que $u_n \leq f \leq v_n$ et $\forall x \in [a; b]$, $v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{n}$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \int_a^b v_n(x) dx - \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b (v_n(x) - u_n(x)) dx \in \left[0; \frac{b-a}{n} \right]$$

La suite (d_n) est donc convergente vers 0, donc f est intégrable.

Les égalités et inégalités de la proposition 1 se démontrent en passant à la limite à partir d'approximations par des fonctions en escaliers construites à partir de subdivisions appropriées.

2.2 Primitives

DÉFINITION 6. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Une *primitive* de f est une fonction F définie et dérivable sur $[a; b]$ telle que $F' = f$.

PROPOSITION 4. ENSEMBLE DES PRIMITIVES

Toute fonction continue f sur un segment $[a; b]$ admet des primitives sur le segment $[a; b]$.
Les primitives de f sont les $F + C$ où F est une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Démonstration. Soit $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Soit $x \in [a; b]$, pour tout h tel que $x + h \in [a; b]$ on a :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Comme f est continue sur $[a; x]$ elle y est bornée et atteint ses bornes. D'après la croissance de l'intégrale :

$$\min_{[x; x+h]} f \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \max_{[x; x+h]} f$$

Par continuité de f , les membres de gauche et de droite tendent vers $f(x)$ de sorte que le taux d'accroissement de F en x également : F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Si G et F sont des primitives de f , alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ sur $[a; b]$ donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G - F = C$ donc $G = F + C$. □ □

REMARQUE 3. La démonstration précédente prouve :

$$\forall f \in C^k([a; b]) \text{ avec } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto C + \int_a^x f(t) dt \text{ vérifie } F \in C^{k+1}([a; b]).$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit également que si F et G sont des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$.

NOTATION 2. $\int f(x) dx$ désigne le nombre $F(x)$, où F est une primitive quelconque de f sur un intervalle.

THÉORÈME 5. FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f . Alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration. D'après la démonstration de la proposition 4, $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Ainsi, il existe une constante C telle que $G = F + C$. Comme $G(a) = 0$, on en déduit : $C = -F(a)$. Ainsi, l'intégrale qui nous intéresse est $G(b) = F(b) - F(a)$. □

EXEMPLE 3. Ce théorème permet l'étude des fonctions définies par une intégrale de bornes variables.

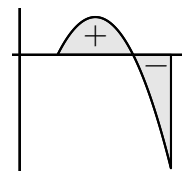
Justifier la dérivabilité et dériver les fonctions définies par $u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $v(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{\ln(t)}{t} dt$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

2.3 Interprétations de l'intégrale

REMARQUE 4 (Aire sous une courbe). Si $f \in C_M^0([a; b])$ a pour courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, alors $\int_a^b f$ est

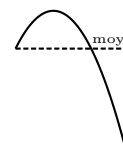
- ★ l'aire du domaine situé sous C_f , au dessus de (Ox) , entre $x = a$ et $x = b$ si $f \geq 0$.
- ★ sinon, il s'agit de l'aire algébrique du domaine située entre C_f , (Ox) , $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est exprimée en unités d'aires : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



REMARQUE 5 (Valeur moyenne). Si $f \in \mathcal{C}_M^0([a; b])$ la valeur moyenne de la fonction f entre a et b est le nombre

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



REMARQUE 6 (Longueur de courbe). Dans le chapitre §5, on a vu que si \vec{g} est une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}_1 sur un intervalle I , la longueur du support de \vec{g} entre les points de paramètres $t_1 \in I$ et $t_2 \in I$ ($t_2 > t_1$) est :

$$L(\vec{g}, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{g}'(t)\| dt$$

2.4 Utilisation des propriétés de l'intégrale

On rappelle que la proposition 1 est valable pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

EXEMPLE 4. *Linéarité.* Rappeler la dérivée de $x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbb{N}$). En déduire une primitive de cette fonction puis l'ensemble des primitives de $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 7x + 3$.

EXEMPLE 5. *Croissance.* À l'aide d'un encadrement, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

EXEMPLE 6. *Relation de Chasles.* Calculer la valeur moyenne de $t \mapsto |t|$ sur $[-1; 3]$.

EXEMPLE 7. *Positivité et linéarité.* Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}_M^0([a; b]) \times \mathcal{C}_M^0([a; b]), \left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)$$

On pourra appliquer la positivité à $\int_a^b (\lambda f + g)^2$ pour en utilisant la linéarité, montrer qu'il s'agit d'un trinôme de discriminant positif et écrire ce discriminant.

3. Méthodes de calcul

3.1 Intégration par parties

PROPOSITION 6. INTÉGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a; b]$. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Démonstration. Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, $(uv)' = u'v + v'u \iff u'v = (uv)' - v'u$ ce que l'on peut intégrer sur $[a; b]$, car par hypothèse, les deux membres sont continus. \square

EXEMPLE 8. Calculer : ① $\int_1^2 xe^x dx$ ② $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan x dx$ ③ $\int_0^{\pi} \sin(x)e^x dx$.

EXEMPLE 9. L'intégration par parties permet aussi le calcul de primitives : $\int \ln(x) dx$.

EXEMPLE 10. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b])$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)e^{int} dt$.

3.2 Changement de variable

PROPOSITION 7. CHANGEMENT DE VARIABLE


Soient φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ et f une fonction continue sur un segment contenant $\varphi([\mathbf{a}; \mathbf{b}])$. Alors :


$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\mathbf{a})}^{\varphi(\mathbf{b})} f(u) du$$

On dit que l'on a effectué le changement de variables $u = \varphi(t)$.


Démonstration. Soit F une primitive de f sur un segment contenant $\varphi([\mathbf{a}; \mathbf{b}])$ (F existe par continuité de f). Le membre de droite vaut $[F(u)]_{\varphi(\mathbf{a})}^{\varphi(\mathbf{b})} = F(\varphi(\mathbf{b})) - F(\varphi(\mathbf{a}))$ et celui de gauche $[F(\varphi(t))]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = F(\varphi(\mathbf{b})) - F(\varphi(\mathbf{a}))$ car $F \circ \varphi$ a pour dérivée $t \mapsto F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ par dérivation des fonctions composées. \square

REMARQUE 7. Pour vérifier l'hypothèse f continue sur $\varphi([\mathbf{a}; \mathbf{b}])$, on sera souvent amené à montrer que φ est une bijection (strictement croissante ou décroissante) sur de $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ sur $[\varphi(\mathbf{a}); \varphi(\mathbf{b})]$. Ce n'est cependant pas nécessaire.

EXEMPLE 11.  Application au calcul de primitives : pour $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^*$, calculer : $\int \frac{dx}{x^2 + \mathbf{a}^2}$


EXEMPLE 12.  Au moyen du changement de variable $x = \sin u$, calculer $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$.


Interpréter le résultat en terme d'aire.


EXEMPLE 13.  Au moyen d'un changement de la forme $u = \dots$ (que l'on déterminera après avoir mis le dénominateur sous forme canonique), calculer :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

3.3 Méthodes adaptées à certaines fonctions

EXEMPLE 14.  Pour intégrer une fraction ou un polynôme trigonométrique f , on essaie un changement de variable. Calculer une primitive de \cos^3 puis de $\frac{1}{\cos}$.

EXEMPLE 15.  Faute de changement de variable simple, pour intégrer un polynôme trigonométrique, on le linéarise : $\int_0^{\pi} \cos^4(t) dt$.

EXEMPLE 16.  Pour intégrer une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples (on traitera l'exemple suivant dans le cadre du chapitre §15 « Polynômes ») : $\int_1^2 \frac{x^8 + 1}{x^7 + x^3} dx$.

3.4 Primitives remarquables

$f(x)$	Intervalles	$\int f(x) dx$	g	$\int g$
k ($k \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}	kx	ku'	ku
x^n ($n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	\mathbb{R} si $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}_+^* sinon	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$u^n u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+ ou \mathbb{R}_-	$\ln x $	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	$\arctan(x)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
e^x	\mathbb{R}	e^x	$u'e^u$	e^u
$\operatorname{sh}(x)$	\mathbb{R}	$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(u)u'$	$\operatorname{ch}(u)$
$\operatorname{ch}(x)$	\mathbb{R}	$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(u)u'$	$\operatorname{sh}(u)$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$-\cos(x)$	$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$\sin(x)$	$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[: k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$		

u est définie et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans l'un des intervalles de la deuxième colonne.

BILAN DU § 14

Prérequis

- ① Fonctions usuelles : tout ! §2 Fonctions usuelles
- ② Équations différentielles : (section 2.1, le reste pour les applications) §6 Équations différentielles

Objectifs prioritaires

- ① connaître les primitives classiques (section 3.4)
- ② savoir intégrer par partie (section 3.1)
 - (a) exemples 8, 9 et 10
 - (b) exercices 1, 4, 8, 9, 12
- ③ savoir effectuer un changement de variable (section 3.2)
 - (a) exemples 13, 12 et 11
 - (b) exercices 1 et 2
- ④ connaître les propriétés de l'intégrale (proposition 1)
 - (a) voir les exemples de la section 2.4
 - (b) exercices 15, 7 et 8, et à partir de l'exercice 9
- ⑤ connaître les interprétations de l'intégrale (section 2.3)
- ⑥ connaître les liens entre primitive et intégrale (remarque 3 et théorème 5)
 - (a) savoir dériver une intégrale de bornes variables : exemple 3 ainsi que l'exercice 7

Objectifs secondaires

- ① connaître les méthodes spécifiques d'intégration (section 3.3)
- ② savoir ce qu'est une fonction en escaliers, une fonction continue par morceaux

Approfondissement

- ① comprendre la construction de l'intégrale à partir du théorème d'approximation uniforme (section 2.1)

TD DU § 14

Exercice 1. Changement de variable et intégration par parties

Calculer l'intégrale :

$$\textcircled{1} \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \quad \textcircled{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx \quad \textcircled{3} \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cos(x^2) dx \quad \textcircled{4} \int_0^1 \frac{1}{\text{ch}(t)} dt$$

Exercice 2. Intégrale d'un polynôme trigonométrique

ATS 2008

Calculer l'intégrale : $\int_0^{\pi} (\sin x)^3 (\cos x)^2 dx$

Exercice 3. Intégrale d'une fonction irrationnelle

ATS 2010

Calculer l'intégrale : $\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+5}} dt$

Exercice 4. Intégration par parties : bien choisir la constante d'intégration !

ATS 2013

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x \arctan^2(x) dx$

Exercice 5. Calcul de primitives

Calculer $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Exercice 6. Primitive de l'inverse de $x \ln x$

ATS 2009

Calculer : $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

Exercice 7. Fonction définie par une intégrale de bornes variables.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- ① Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-2x} \ln 2 \leq f(x) \leq e^{-x} \ln 2$. Établir un résultat analogue sur \mathbb{R}_-^* .
- ② Utiliser cette inégalité pour étudier les limites de f , puis pour montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.
- ③ Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.
- ④ Dresser le tableau de variations complet de f .

Exercice 8. Suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

- ① Étudier la monotonie de la suite (I_n) , puis sa convergence.
- ② Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
- ③ En déduire la limite, puis un équivalent de (I_n) .

Exercice 9. Irrationalité de e

On souhaite obtenir une suite qui converge vers e , et démontrer l'irrationalité de ce dernier.

Pour tout entier naturel n , on définit $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

- ① Calculer I_0 .
- ② Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{1}{n!}$. En déduire la limite de (I_n) .
- ③ Trouver une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n , pour tout entier naturel n .
- ④ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
- ⑤ À partir de l'encadrement de la seconde question, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < n! e < a_n + 1$ où $a_n \in \mathbb{N}$. En raisonnant par l'absurde, démontrer que e est un nombre irrationnel : $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ème intégrale de Wallis est $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

On souhaite évaluer ces intégrales et connaître leur comportement asymptotique.

- ① Calculer w_0 . Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
- ② En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $w_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et $w_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$, puis la valeur de $w_n w_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- ③ Montrer que (w_n) est strictement positive et décroissante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$.
- ④ Déduire de ce qui précède $w_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} w_n$ puis $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 11. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue et croissante sur $[a; b]$, où $a < b$. On considère les sommes de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n^- = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n^+ = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

- ① Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^- \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n^+$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- ② Calculer la limite de $S_n^+ - S_n^-$. En déduire que (S_n^+) et (S_n^-) convergent vers $\int_a^b f(x) dx$.
- ③ Application : calculer au moyen d'une intégrale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ (factoriser par n^2 au numérateur et au dénominateur)

Exercice 12. Lemme de Lebesgue et application

Soient $a < b$ réels. On souhaite démontrer le lemme de Lebesgue : si $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{C})$ alors $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$,

et l'utiliser pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

- ① Démontrer le lemme de Lebesgue au moyen d'une intégration par parties.
- ② Trouver deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^2$, $\int_a^b (ax^2 + bx) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
- ③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0; \pi[$, $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
- ④ Montrer à partir de ce qui précède que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt + \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt$ où φ est une fonction \mathcal{C}^1 sur $]0; \pi[$ qui se prolonge en 0 de façon \mathcal{C}^1 .
- ⑤ Conclure à l'aide du lemme de Lebesgue.

Exercice 13. Équation linéaire d'ordre 1 avec second membre

ATS 2003

Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = \ln x$.

Exercice 14. Développements limités

Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$.

Exercice 15. Encadrement d'une suite définie par une intégrale

ATS 2008

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2-x} dx$. Calculer sa limite en l'infini.