§ 13 : Dimension finie

1. Notions de base, de coordonnées et de dimension

1.1 Sous-espace engendré par un famille de vecteurs

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont des entiers naturels non nuls.

Définition 1 (rappel). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}$.

On dit que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E, ou encore que $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice ou un système générateur de E, si et seulement si

$\forall v \in E, \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$

ce qui revient à dire : $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n : \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

Notation 2. Par convention, si $n = 0$, $\text{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

On note également $\mathbb{K}u = \text{Vect}(u)$. (l'espace engendré par un vecteur est formé de ses multiples).

Exemple 1. Donner une famille génératrice de $F = \{(a, b, a + b) : \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Soit $G = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2, \cos \times \sin\}$. Les fonctions $x \mapsto 2$, $x \mapsto \cos(x)\}$, et $x \mapsto \cos(2x)\}$ appartiennent-elles à G ?

1.2 Famille libre de vecteurs

Définition 2. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La famille est *libre* si et seulement si toute combinaison linéaire nulle de ses vecteurs a des coefficients tous nuls :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Cela signifie que l'équation d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$ a pour seule solution $(0, \dots, 0)$.

Une famille qui non libre est dite *liée*. Deux vecteurs liés sont *colinéaires*, trois vecteurs liés sont *coplanaires*.

Exemple 2 (Espace). Lesquelles des familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^3$? Interpréter.

① $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ ② $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$ ③ $\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\\sqrt{8}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ ④ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ⑤ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

Exemple 3 (Fonctions). Montrer que la famille $(\cos^2, \sin^2, \cos\sin)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1.3 Bases et coordonnées

Définition 3. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille ordonnée de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La famille $\mathcal{B}$ est une *base* de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Lorsqu'un espace vectoriel possède une base finie, il est dit *de dimension finie.* (1)

Exemple 4. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ composée des vecteurs e_i dont toutes les composantes sont nulles, sauf la composante i qui vaut 1, est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est formée des vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(1). Une famille infinie est libre lorsque toute ses sous-familles finies sont libres. Elle est génératrice lorsque tout vecteur est combinaison linéaire finie de ses membres. C'est une base lorsqu'elle est libre et génératrice.

Exemple 5 (Plan). Parmi ces familles de vecteurs, lesquelles sont libres ? Génératrices ? Forment une base ?

① $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ ② $\left(\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$ ③ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)$ ④ $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Proposition 1. Coordonnées

La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si et seulement

$$\forall y \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Cela signifie que chaque vecteur de E est s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de la base. Les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les *coordonnées* du vecteur y dans la base $\mathcal{B}$.
La matrice colonne formée des coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ du vecteur y dans la base $\mathcal{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
En particulier, l'application $C_{\mathcal{B}}$ de E dans $\mathbb{K}^n$, qui à un vecteur u associe $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

Démonstration. L'existence d'une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ à l'équation $y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ vient du fait que $\mathcal{B}$ est génératrice. Si $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ vérifie également $y = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$, la différence des deux équations $0_E = (\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n$ implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$ par liberté de $\mathcal{B}$. Ainsi la solution est unique. □

Exemple 6. $u = \begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$. Préciser la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 5 ①.

Exemple 7. Soit $\mathcal{B} = \{\cos^2, \sin^2, \cos \times \sin\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Pourquoi $\mathcal{B}$ est–elle une base de G ?
Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(1)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x \mapsto \cos(2x))$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x \mapsto \sin(2x))$.

Exemple 8. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base est une base.

1.4 Matrice d'une application linéaire

Définition 4. Soient :

- ⋆ E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
- ⋆ F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

La *matrice dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée* d'une application linéaire f de E dans F, est la matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dont la j-ème colonne est le vecteur $[f(e_j)]^{\mathcal{B}'}$ des composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!],\ f(e_j) = a_{1j}\, e'_1 + \cdots + a_{nj}\, e'_n$$

On notera cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ou simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ lorsque f est un endomorphisme et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Remarque 1. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée se présente ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1\\ e'_2\\ \vdots\\ e'_i\\ \vdots\\ e'_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array}\\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Proposition 2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit f une application linéaire de E dans F et u un vecteur de E.
On note $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^p & \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\times} & \mathbb{K}^n\\
\uparrow{\scriptstyle C_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle C_{\mathcal{B}'}^{\langle -1\rangle}}\\
E & \xrightarrow[f]{} & F
\end{array}$$

Démonstration. On adopte les notations de la remarque 1 Soit $u \in E$.

$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} u_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} u_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j\right) e'_j.$$

Le coefficient de e'_j dans la décomposition de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est bien $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)_j$. □

EXEMPLE 9. ✎ Soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On définit l'endomorphisme f par $f(e_1) = e_1 + 2e_2$ et $f(e_2) = e_1$. Soit u le vecteur $u = e_1 + e_2$

Déterminer la M matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X des coordonnées de u dans cette base.

Comment interpréter le produit MX ?

EXEMPLE 10 (Fonctions). ✎ Soit, comme dans l'exemple 7, la famille $\mathcal{B} = \{\cos^2, \sin^2, \cos\sin\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

On définit l'application $\mathcal{D}$ sur G par $\forall f \in G$, $\mathcal{D}(g) = g'$.

① Calculer l'image par $\mathcal{D}$ de la base $\mathcal{B}$ de G et en déduire que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme de G.

② Donner la matrice de M de l'endomorphisme $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

③ Étudier le noyau et l'image de cette matrice. En déduire le noyau et l'image de $\mathcal{D}$.

1.5 Dimension

PROPOSITION 3. DIMENSION

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :
- ⋆ il n'existe pas de famille libre à plus de n éléments.
- ⋆ il n'existe pas de famille génératrice de moins de n éléments
- ⋆ toute base a exactement n éléments.

Ce nombre n est appelé la *dimension* de E et noté $\dim(E)$.

Démonstration. Soient $n+1$ vecteurs de E : $v_1, \ldots, v_{n+1}$. En considérant les coordonnées suivant chaque u_i de l'équation $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0_E$, on obtient un système de $n+1$ équations à n inconnues, qui contient au maximum n pivots, donc un paramètre au moins : il n'y pas unicité des solutions, la famille n'est pas libre.

De même, avec $n-1$ vecteurs de E : $v_1, \ldots, v_{n-1}$: les composantes suivant les u_i de l'équation $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, donnent un système de n équations à $n-1$ inconnues, qui contient au maximum $n-1$ pivots, donc au moins une ligne de zéros : les y ne satisfaisant pas l'équation associée ne peuvent se décomposer suivant les v_i, la famille n'est donc pas génératrice.

Une famille libre n'a pas plus de n éléments, une famille génératrice pas moins de n, donc une base en a n. □

NOTATION 3. Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est nulle : $\dim(\{0\}) = 0$.

Un espace vectoriel E est une *droite vectorielle* si $\dim E = 1$, un *plan vectoriel* si $\dim E = 2$.

En cas d'ambiguïté, on précise le corps de référence en indice de dim : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

EXEMPLE 11. Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$, et G défini dans l'exemple 7 ?

2. Propriétés des bases

2.1 Caractérisation d'une base

PROPOSITION 4. RECONNAÎTRE UNE BASE

Soit $\mathcal{B}$ une famille d'un espace vectoriel de dimension n. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $\mathcal{B}$ est une base.
- ⋆ $\mathcal{B}$ est une famille libre à n éléments.
- ⋆ $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n éléments.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Les composantes suivant $\mathcal{B}'$ de l'équation $y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ mènent à un système de n équations à n inconnues. Dans les deux dernières situations, ce système admet n pivots exactement (car l'équation $0 = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ admet une solution unique si $\mathcal{B}$ libre, et l'équation initiale admet au moins une solution si $\mathcal{B}$ génératrice). Ainsi, le système admet une unique solution : $\mathcal{B}$ est une base. La réciproque est vraie d'après la proposition 3 $\square$

Exemple 12. Justifier rapidement (sans pivot) que la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 5 ① est une base de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Théorème de sélection - complétion d'une base

Proposition 5 (Sélection - complétion).

De toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie E, on peut extraire une base.

Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie E peut être complétée en une base.

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille génératrice de E : pour tout $y \in E$ l'équation admet au moins une solution. On résout $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = y$ par la méthode du pivot : la famille $\mathcal{P}$ constituée des vecteurs correspondants aux colonnes à pivot est une base (génératrice : en choisissant les paramètres égaux à 0 on obtient $y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{P})$ et libre : le système admet une unique solution : autant de pivots que de colonnes).

Si E est de dimension finie p et $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, soit $n = p$ et c'est une base, soit $n < p$ et en prenant $u_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ on complète la famille en une famille libre de $n+1$ vecteurs. En répétant l'opération $n - p$ fois on obtient une famille libre à p éléments, donc une base. $\square$

Remarque 2. Cela implique en particulier que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Pour compléter une famille libre $(u_1, \dots, u_k)$ en une base de E de dimension finie, on considère une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on résout $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ en commençant par prendre les k premiers pivots dans les k premières colonnes. Les colonnes à pivot forment une base contenant la famille initiale.

3. Utilisation de la dimension

3.1 Dimension et sous-espaces vectoriels

Proposition 6.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- ⋆ $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
- ⋆ si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$

Démonstration. Une base $\mathcal{B}$ de F est une famille libre à $\dim E$, que l'on peut compléter en une base de E. Donc $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Si une base de F a $\dim(E)$ éléments, c'est une famille libre à $\dim(E)$ éléments, donc une base de E. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$. $\square$

Proposition 7. Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. L'idée est de compléter une base de $F \cap G$ d'une part en une base de F, et d'autre part en une base de G. On montre alors que les $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ considérés forment une base de $F + G$. $\square$

3.2 Dimension et applications linéaires

Théorème 8. « du rang »

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels E et F de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$$

La dimension $\mathrm{rg}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$ est appelée le rang de L.

Démonstration. Soit E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(L)$ dans E : $E = E' \oplus \mathrm{Ker}(L)$. On considère $L' : E' \to \mathrm{Im}(L)$ la restriction de L à E'. On démontre qu'il s'agit d'un isomorphisme et on utilise la formule de Grassmann. □

Exemple 13. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Interpréter en terme d'injectivité, surjectivité de L les égalités :
① $\dim(F) = \mathrm{rg}(L)$? ② $\dim(E) = \mathrm{rg}(L)$? ③ $\dim(E) = \dim(F) = \mathrm{rg}(L)$?
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

4. Propriétés des matrices d'une application linéaire

4.1 Composition et réciproque

Proposition 9 (Composition). E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
- ⋆ E est de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B} =$.
- ⋆ F est de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}'$.
- ⋆ G est de dimension m, muni d'une base $\mathcal{B}''$.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $u \in E$. On a alors :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\times"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\times"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)\times"] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "C_{\mathcal{B}''}^{\langle -1\rangle}"] \\
E \arrow[u, "C_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"'] & G
\end{tikzcd}$$

Proposition 10. E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies.
- ⋆ E est muni d'une base $\mathcal{B}$.
- ⋆ F est muni d'une base $\mathcal{B}'$.

Soit $\mathcal{L}$ un isomorphisme de E dans F. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathcal{L}^{\langle -1\rangle}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathcal{L})\right)^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^p \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}^{\langle -1\rangle}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[l, "(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathrm{B}'}(f))^{-1}\times"'] \\
E & F \arrow[l, "f^{\langle -1\rangle}"] \arrow[u, "C_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le produit des deux matrices, en utilisant la proposition précédente, donne l'identité. □

4.2 Changement de base

Tous les résultats de cette section viennent de la proposition 9.

Définition 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension finie n.
E est muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (e'_1, \dots, e'_n)$
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.
On a encore $P = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})\right)^{-1}$.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 11. Formules de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E.
Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Alors :
① $\forall u \in E$, $\mathrm{Mat}(u)_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
② $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id})_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})\right)^{-1}$: P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$
③ Si f est un endomorphisme de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$.

NOTATION 4. ⚠ La terminologie peut-être trompeuse : pour obtenir les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$, on multiplie les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$!

EXEMPLE 14. Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ introduite dans l'exemple 5 ①.

① Donner la matrice A de l'application $\mathcal{L}$ dans la base canonique, puis la matrice A' de $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{B}$.

② Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 5 ①.

③ Exprimer A en fonction de P et A' et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

REMARQUE 3. Plus généralement, si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, si l'espace E est muni de deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, si l'espace F est muni de deux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, et si f est une application linéaire de E dans F : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f) = \mathrm{Mat}^{-1}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{Id})\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id})$.

BILAN DU § 13

Prérequis

① Maîtriser le chapitre §12 Espaces vectoriels ☐

② Maîtriser le chapitre §10 Matrices ☐

③ Rudiments de calcul dans les complexes : §3 Complexes ☐

Objectifs prioritaires

① connaître la définition d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs (1.1) ☐

② connaître la définition d'une famille libre de vecteurs (1.2) ☐

③ connaître la définition d'une base, de la dimension d'un espace vectoriel (1.3) ☐

(a) savoir refaire les exemples 2 et 5 ($\mathbb{K}^n$) ☐

④ connaître le lien entre dimension, famille libre, génératrice, et base (proposition 3) ☐

⑤ connaître la formule de Grassmann et le lien entre dimension et sev (proposition 7) ☐

⑥ savoir compléter une base d'un sev en une base d'un ev (théorème 5) ☐

⑦ connaître le théorème du rang (3.2) ☐

⑧ savoir passer d'un vecteur à ses coordonnées dans une base (section 1.3) ☐

⑨ savoir former la matrice d'une application linéaire et connaître ses propriétés (section 1.4) ☐

(a) exemple 9 ☐

(b) exercices 5, 11 et 3 ☐

⑩ savoir travailler dans des bases différentes (section 4.2) ☐

(a) bien comprendre l'exemple 14 ☐

(b) exercices 5 ☐

Objectifs secondaires

① savoir résoudre des exercices de synthèse plus abstraits (exercices 1 et 3) ☐

② matrices d'applications linéaires dans un cadre abstrait : exemples 10 ☐

Approfondissement

① savoir démontrer des propriétés abstraites : exercice 6 ☐

TD du § 13

Exercice 1. Polynômes de Lagrange

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur où égal à n.

Soient $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit le polynôme de Lagrange L_k par $L_k(X) = \displaystyle\prod_{i \neq k} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

① Donner la base canonique et la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$.
② Dans cette question seulement, $n = 2$ et $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$. Écrire les trois polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = -3$ et $P(3) = 0$.
③ Vérifier que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $L_k \in \mathbb{C}_n[X]$.
④ Montrer que $\mathcal{B} = \{L_0, \dots, L_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
⑤ En déduire que deux polynômes de degrés inférieur où égal à n qui coïncident en $n+1$ valeurs de la variable sont égaux.

Exercice 2. Étude d'un endomorphisme de l'espace

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $E_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = a \right\}$ et $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}$.

① Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que E_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
② Démontrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
③ Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(L)$, en déduire le rang de L. L'application L est-elle injective ? surjective ?
④ Vérifier que $\mathrm{Im}(L) \subset E_0$, puis que $\mathrm{Im}(L) = E_0$.
⑤ Montrer que $\mathrm{Im}(L) \oplus \mathrm{Ker}(L) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Espace des exponentielles-polynômes de degrés 2

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (ax^2 + bx + c)\,e^x$ où a, b, c sont réels.

① Montrer que E est un sous espace-vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
② Déterminer une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E.
③ Soit $\mathcal{L}$ l'application définie par $\mathcal{L}(f) = f'$ pour $f \in E$. Vérifier que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme.
④ Donner la matrice A de l'endomorphisme $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A^{-1}.
⑤ Trouver une primitive de $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$.

Exercice 4. Endomorphisme d'un espace de polynômes ATS 2014

Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$, $P(X) \mapsto f\big(P(X)\big) = P(X) - XP'(X)$.

① Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
② Donner la matrice de f dans une base au choix, que l'on précisera.
③ Donner une base du noyau de f.
④ Donner la dimension et une base de l'image de f.

Exercice 5. Endomorphisme de l'espace donné par sa matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Enfin, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

① Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
② Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
③ Donner une base de l'image et du noyau de f.

Exercice 6. Endomorphisme de carré nul

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathcal{L}$ un endomorphisme de E. Montrer : $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \iff \mathcal{L} \circ \mathcal{L} = 0$.

Exercice 7. Endomorphisme et changement de base

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3x+y-z\\-x+5y-3z\\4y-2z\end{pmatrix}$.

① Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et préciser sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

② Soient $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}_2=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

③ Déterminer la matrice B de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 8. Composées d'un endomorphisme du plan

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

Soient $u=e_1+e_2$, $v=-e_1+e_2$, et l'endomorphisme $\mathcal{L}$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$: $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

① Montrer que $\mathcal{B}'=(u,v)$ est une base de E.

② Donner la matrice A' de l'endomorphisme $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{B}$.

③ En déduire $\mathcal{L}\circ\cdots\circ\mathcal{L}(e_1)$. ($n$ compositions)

Exercice 9. Système différentiel linéaire d'ordre 2 guidé

On considère le système différentiel (S) $\left\{\begin{array}{rcl}x'(t)&=&-7x(t)-9y(t)\\y'(t)&=&6x(t)+8y(t)\end{array}\right.$ et les vecteurs $u\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

① Pour t réel on note $X(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de composantes $x(t)$ et $y(t)$.
Montrer que $X'(t)=AX(t)$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à préciser.

② On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Calculer $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$. En déduire la matrice D de φ dans la base (u,v).

③ Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u,v).
Démontrer que $X'=AX \iff Y'=DY$ où $Y=P^{-1}X$.
Résoudre $Y'=DY$ et trouver les composantes $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ de Y.

④ Résoudre le système différentiel (S).

Exercice 10. Étude d'un projecteur

Soient $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\-x+2y-2z\\-x+y-z\end{pmatrix}$, et les vecteurs $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

① Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

② Déterminer une base du noyau de φ. L'application φ est-elle un automorphisme ?

③ Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathrm{Im}\varphi$. L'endomorphisme φ est-il surjectif ?

④ Démontrer que : $\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.

⑤ Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}\varphi$, et une description de $\mathrm{Im}\varphi$ par des équations linéaires.

⑥ Démontrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\varphi$. (le noyau et l'image de φ sont des espaces supplémentaires).

⑦ Prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Im}\varphi$. (on rappelle que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ u\mapsto u$)

⑧ Montrer que $\forall u\in\mathrm{Im}\varphi,\ \varphi(u)=u$. Calculer ensuite, pour tout $(u,v)\in\mathrm{Im}\varphi\times\mathrm{Ker}\varphi,\ \varphi(u+v)$.

⑨ En déduire que $\varphi\circ\varphi=\varphi$: on dit que φ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\varphi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\varphi$.

Exercice 11. Endomorphisme donné par l'image d'une base ATS 2010

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}f(e_1)&=&e_1+2e_2-e_3\\f(e_2)&=&2e_1+7e_2+3e_3\\f(e_3)&=&3e_2+5e_3\end{array}\right.$$

① Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

② Déterminer l'image et le noyau de f.

③ Montrer que Im(f) et Ker(f) sont supplémentaires.