§ 11 : Fonctions régulières

1. Fonctions continues

1.1 Définition et premières applications

On rappelle la définition vue au §2 « Fonctions usuelles » :

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue* en a si et seulement si f admet une limite finie en a, ce qui équivaut à :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est dite continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. La continuité d'une fonction intervient par exemple lors de compositions de limites. Soit I un intervalle fermé et $f \in \mathcal{C}^0(I, I)$. Montrer que, si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite ℓ, alors ℓ est un point fixe de f : $\ell = f(\ell)$.

Proposition 1 (Théorèmes généraux sur la continuité). Soient u et v deux fonctions définies et continues sur un ensemble I. Alors

- ⋆ $\lambda \cdot u$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $u + v$, $u - v$ et $u \times v$ sont continues sur I, ainsi que $\frac{u}{v}$ (où v ne s'annule pas sur I).
- ⋆ la composée $w \circ u$ ($w \circ u(x) = w(u(x))$), est continue sur I où $w \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$, et u à valeurs dans J.
- ⋆ la réciproque $u^{\langle -1 \rangle}$ d'une bijection continue u d'un intervalle I dans un intervalle J est continue.
- ⋆ si u est à valeurs réelles ou complexes, $|u|$, $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ sont continues.

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences des propositions sur les opérations et compositions de limites du chapitre §7 « Analyse asymptotique ».

Pour le dernier, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $]a - \varepsilon\,; a + \varepsilon[$ est un intervalle, qui a pour image un intervalle ouvert I' contenant $u(a)$ (remarque 4). Il existe donc $\delta > 0$ tel que $]u(a) - \delta\,; u(a) + \delta[\subset I'$, sur lequel on a l'inégalité : $|u^{\langle -1 \rangle}(y) - a| < \varepsilon$. □

Méthode 1.

Pour montrer la continuité d'une fonction, on utilise les théorèmes généraux. Pour les valeurs en lesquelles ces théorèmes ne permettent pas de conclure, on revient à la définition : on vérifie que la limite de f en a existe (et vaut $f(a)$).

Exemple 2. Démontrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}_+$: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Remarque 1 (Prolongement par continuité). Une fonction u définie sur I est prolongeable par continuité en $a \notin I$ si la fonction u admet une limite finie en a. La nouvelle fonction $\tilde{u}$ définie par $\tilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{u}(a) = \lim_{x \to a} u(x)$ est alors continue en a.

Exemple 3. ✎ La fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant est énoncé dans le §2 « Fonctions usuelles » et démontré dans le TD du §9 « Suites » :

Théorème 2. « des valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Si f et continue sur I et k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet *au moins* une solution dans l'intervalle $[a\,; b]$.

Remarque 2. Une première conséquence est que l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle (par nécessairement de même nature).

Remarque 3. Une conséquence importante : si on ajoute l'hypothèse « f strictement monotone sur I » alors la solution est unique. Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise donc une bijection sur l'intervalle $f(I)$. C'est le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque 4. Réciproquement, une fonction continue et bijective sur un intervalle est strictement monotone. En effet, si $a < b < c$ et par exemple $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \leqslant f(b)$, l'équation $f(x) = \max(f(a), f(c))$ aurait deux solutions distinctes, ce qui est impossible. L'image d'un intervalle par une bijection continue est donc un intervalle de même nature.

1.3 Théorème du maximum

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un ensemble I.

- ⋆ f est majorée $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$. ($M$ est alors un *majorant* de f).
- ⋆ f est minorée $\iff \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$. ($m$ est alors un *minorant* de f).
- ⋆ f est bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$

Remarque 5. La dernière définition est encore valable pour une fonction à valeurs complexes. Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, f bornée équivaut à f majorée et minorée.

Théorème 3. du maximum

Soit a et b réels, et f une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.
Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

On dit que $[\alpha\,;\beta]$ *domine* $[a\,;b]$ si $\forall x \in [a\,;b],\ \exists m \in [\alpha\,;\beta],\ f(m) \geqslant f(x)$. On d'abord que si $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$ est dominant, l'un au moins des intervalles $[\alpha\,;\gamma]$ et $[\gamma\,;\beta]$ est dominant. On construit alors deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) par dichotomie, de sorte que $[a_n\,;b_n]$ soit dominant. Ces deux suites convergent vers un réel ℓ et si $x \in [a\,;b],\ \exists x_n \in [a_n\,;b_n],\ f(x) \leqslant f(x_n)$. En passant à la limite : $f(x) \leqslant f(\ell)$. Donc f est majorée et atteint son majorant en ℓ. En appliquant cela à $-f$, on obtient que f est minorée et atteint son minorant. □

Remarque 6. Le théorème du maximum et le théorème des valeurs intermédiaires impliquent que l'image d'un segment (intervalle fermé borné $[a\,;b]$) par une fonction continue est encore un segment.

2. Fonctions dérivables

2.1 Définition et interprétations

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si la limite du taux d'accroissement en x_0 existe, celle-ci définit le nombre dérivé $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cette définition équivaut encore à l'existence d'un réel $f'(x_0)$ tel que

$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o_0(h)$ ou encore $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$.

Lorsque f est dérivable en tout $x_0 \in I$, la fonction $f' : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f'(x)$ est la *fonction dérivée* de f.

Exemple 4. À l'aide de la définition, retrouver le nombre dérivé au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

① $x \mapsto ax + b$ ② $x \mapsto x^2$ ③ $x \mapsto \sqrt{x}$ ④ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque 7. Si $f(x)$ ne s'annule pas au voisinage de x_0, et s'il existe un réel $f'(x_0) \neq 0$ tel qu'on ait l'équivalence $f(x_0+h) - f(x_0) \underset{0}{\sim} hf'(x_0)$, alors $f'(x_0)$ est le nombre dérivé de f en x_0. Voir le paragraphe 2.5 pour une table des équivalents remarquables que l'on peut obtenir avec cette méthode.

Exemple 5. ✎ En déduire un équivalent de $\arctan(x)$ en 0.

Remarque 8. L'égalité $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + o_{x_0}(x-x_0)$ signifie qu'au voisinage du point d'abscisse x_0, la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ sont presque confondues, cette dernière droite est la *tangente* à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.

Lorsque le taux d'accroissement tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0, la fonction f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Lorsque le taux d'accroissement en x_0 admet deux limites distinctes en à gauche et à droite, la fonction f n'est pas dérivable en x_0, elle admet deux demi-tangentes de pentes distinctes à gauche et à droite du point d'abscisse x_0. Ces pentes sont appelées dérivée à gauche et à droite en x_0.

Remarque 9. Une fonction dérivable en x est continue en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o_0(h)$, or $h = o_0(1)$, donc $f(x+h) = f(x) + o(1)$. La réciproque, en revanche n'est pas vraie. Par exemple, ni $x \mapsto |x|$, ni $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont dérivables en 0.

2.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 4. Théorèmes généraux de dérivation

Soient I et J deux intervalles, et u et v deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

① $k \in \mathbb{K}$ et u est dérivable sur I, alors $k \cdot u$ aussi et $(k \cdot u)' = k \cdot u'$

② u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ aussi et $(u+v)' = u' + v'$

③ u et v sont dérivables sur I, alors uv aussi et $(uv)' = u'v + v'u$

④ u et v sont dérivables sur I, et v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

⑤ $u : I \to J$ dérivable et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$.
On pourra retenir : $(v(u))' = v'(u) \cdot u'$ (multiplier par u').

Démonstration. Repose sur la définition 3. Par exemple :

On sait que $\forall x \in I,\ u(x+h) \overset{(a)}{=\!=} u(x) + hu'(x) + o_0(h)$ et $v(x+h) \overset{(b)}{=\!=} v(x) + hv'(x) + o_0(h)$

En multipliant (a) par k : $ku(x+h) = ku(x) + hku'(x) + o_0(h)$ d'où ①.

En ajoutant (a) et (b) : $(u+v)(x+h) = u(x) + v(x) + h(u'(x) + v'(x)) + o_0(h)$ d'où ②.

En multipliant (a) et (b) : $(uv)(x+h) = u(x)v(x) + h(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) + h^2(u'(x)v'(x)) + o_0(h)$.

Comme $h^2u'(x)v'(x) = o_0(h)$ on a donc ③. □

Exemple 6. ✎ Dérivabilité et dérivée de : ① $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ ② $g : x \mapsto \ln(e^x + \sin(2x))$

Méthode 2. Fonctions réciproques et dérivées

Soit $u : I \to J$ bijective, et dérivable sur I. Sa réciproque $u^{\langle -1 \rangle}$ est dérivable sur J privé des $u(x)$ avec x tel que $u'(x) = 0$. On obtient $(u^{\langle -1 \rangle})'$ en dérivant l'égalité : $x = u \circ u^{\langle -1 \rangle}$.

Exemple 7. ✎ Retrouver les dérivées de : ① exp ② $\sqrt{}$ ③ arctan ④ arcsin.

2.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Lorsqu'elle existe, on appelle dérivée d'ordre n de f, et on note $f^{(n)}$, la fonction définie par la relation de récurrence :

$$f^{(0)} = f,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

On note parfois : $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$.

⚠ Ne pas confondre $f^{(n)} = f''^{\cdots\prime}$ et $f^n = f \times f \times \cdots \times f$.

Proposition 5. Formule de Leibniz

Soient u et v deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Alors uv est n fois dérivable sur I et sa dérivée d'ordre n est donnée par :

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Démonstration. ✎ La formule se démontre par récurrence et repose sur la formule du triangle de Pascal. □

Exemple 8. ✎ Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}$.

Définition 5. On dit que la fonction f définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est de *classe* $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, si et seulement si f est k fois dérivable sur I et sa dérivée d'ordre k : $f^{(k)}$ est continue.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable sur I.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est notée : $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.

Exemple 9. ✎ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer : f dérivable sur $\mathbb{R}$ mais $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

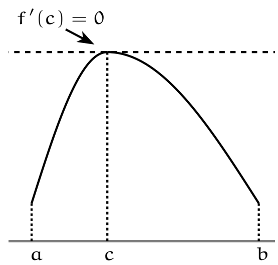
Remarque 10. En vertu des théorèmes généraux sur la dérivation et la continuité, les combinaisons linéaires, produits, compositions et quotients définis de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur des intervalles sont encore de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 11 (Critère de dérivabilité). Si $u \in \mathcal{C}^0([a\,;b])$ et $u \in \mathcal{C}^1(]a\,;b])$, il suffit que u' admette une limite ℓ en a pour que $u \in \mathcal{C}^1([a\,;b])$ et $u'(a) = \ell$. Dans le cas contraire, il arrive que u soit tout de même dérivable.

Exemple 10. ✎ Étudier la dérivabilité en 0 de $f : [0\,;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sqrt{x - x^2}$

2.4 Égalité des accroissements finis, et applications

Proposition 6 (Théorème de Rolle). Soient a et b deux réels distincts et f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$, continue sur $[a\,;b]$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.



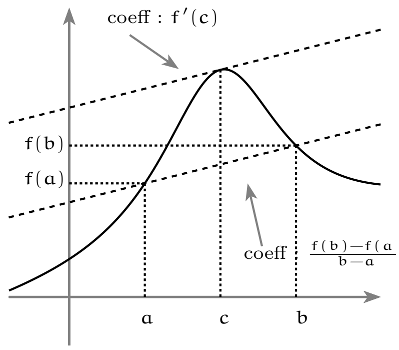
Démonstration. Si f est constante, $f'(x) = 0$ sur $]a\,;b[$, ce qui prouve le résultat. Sinon, f étant continue sur $[a\,;b]$ elle y est bornée et atteint ses bornes. Comme $f(a) = f(b)$ et f non constante, le maximum ou le minimum de f est atteint en un point $c \in\ ]a\,;b[$. Supposons que $f(c)$ soit maximum. Soit $g :]a\,;b[\setminus \{c\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Comme $f(c)$ est maximum, $f(x) - f(c) \leqslant 0$, d'où g est de signe contraire à $x - c$: $g(x) \geqslant 0$ si $x < c$ et $g(x) \leqslant 0$ si $x > c$. En faisant tendre x vers c, on obtient $f'(c) \geqslant 0$ et $f'(c) \leqslant 0$ soit $f'(c) = 0$. Idem si $f(c)$ est minimum. □

Théorème 7. Égalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels distincts et f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$ et continue sur $[a\,;b]$. Alors il existe $c \in\ ]a\,;b[,\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. Soit $g : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$. La fonction g est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. De plus, $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $\forall x \in\ ]a\,;b[,\ g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc l'égalité voulue. □

Remarque 12. Géométriquement, le théorème des accroissements finis signifie qu'étant donnée une sécante tirée entre deux points de la courbe représentative de f, il existe une tangente en un point situé entre les deux précédents, parallèle à la sécante.



Remarque 13. L'interprétation cinétique du théorème est la suivante : lors d'un trajet de vitesse moyenne v, il existe un t instant au moins en lequel la vitesse instantanée vaut exactement v.

Proposition 8. Variations de fonctions

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors
- ⋆ f est constante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- ⋆ f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- ⋆ f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- ⋆ f est strictement croissante sur I si $f'(x) > 0$ sur I éventuellement privé d'un nombre fini de valeurs)
- ⋆ f est strictement décroissante sur I si $f'(x) < 0$ sur I éventuellement privé d'un nombre fini de valeurs)

Démonstration. Soient $x > x'$ deux réels de I. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x\,;x'[$ tel que $f(x) - f(x') = (x - x')f'(c)$.

Si $f' = 0$ sur I, on obtient $f(x) = f(x')$ (pour tous x, x') donc f constante. On a prouvé la réciproque dans le théorème de Rolle.

Si, par exemple, $f' \geqslant 0$ sur I, on obtient $f(x) - f(x') > 0$ donc $f(x) > f(x')$ pour tous x, x' : f croissante. Réciproquement, $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \geqslant 0$ si f croissante et $x > x'$, ce qui donne lorsque x' tend vers x : $f'(x) \geqslant 0$. □

Remarque 14. ⚠ Ces résultats ne sont valables que sur des intervalles ! La fonction $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie $u'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $u(-1) < u(1)$. Elle l'est, cependant, sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 11. ✎ Dériver $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ et interpréter le résultat.

Proposition 9. Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. On suppose de plus que $\forall x \in]a\,;b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors :

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$$

Démonstration. On applique l'égalité des accroissements finis, puis l'encadrement donné en hypothèse. □

Exemple 12. ✎ Démontrer que ① $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. ② $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \leqslant e^x$

2.5 Dérivées et équivalents remarquables des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, l'ensemble de dérivabilité n'a été indiqué que lorsqu'il est différente de l'ensemble de définition.

Les équivalents, s'ils ne sont pas sus parfaitement, doivent pouvoir être retrouvés rapidement au moyen d'un développement limité.

$f(x)$	Départ	Arrivée	$f'(x)$	Dérivabilité	Équivalent
$k\ (\in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0		
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}		$(1+x)^n - 1 \underset{0}{\sim} nx$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$		$\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$		$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	e^x		$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$		$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$[1\,;+\infty[$	$\mathrm{sh}(x)$		$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	$\cos(x)$		$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	$-\sin(x)$		$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$		$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$	$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arcsin(x)$	$[-1\,;1]$	$[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$	$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arccos(x)$	$[-1\,;1]$	$[0\,;\pi]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$	$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{0}{\sim} -x$

On notera que la formule de dérivation de x^n est valable pour n entier négatif (mais alors l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$, cas particulier : $n = -1$: $x^{-1} = \frac{1}{x}$) et même pour n réel (l'ensemble de définition devient $\mathbb{R}_+^*$, cas particulier : $n = \frac{1}{2}$: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$).

TD du § 11

Exercice 1. Applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$
Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les constantes.

Exercice 2. Une fonction plate en 0
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.

① Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement.
② Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$.
③ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 3. Dérivées successives
Calculer la dérivée n-ième de la fonction
① $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ② $f(x) = e^{-x}$ ③ $f(x) = \ln(x)$ ④ $f(x) = x^2(1+x)^k$ où $k \in \mathbb{N}$

Exercice 4. Accroissements finis et étude d'une suite
On souhaite étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

① Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
② Montrer que si (u_n) converge, elle n'a qu'une limite possible ℓ.
③ En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\ell - u_n)$.
④ En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant 2^{1-3n/2}$ et conclure.

Exercice 5. Approximations et inégalités des accroissements finis
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :
① $\sqrt{10\,001} \approx 100$ ② $\dfrac{1}{0{,}999^2} \approx 1$ ③ $\cos(1) \approx \dfrac{1}{2}$

Exercice 6. Retourner une inégalité de fonctions positives et continues sur un intervalle compact
Soient deux réels $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $I = [a\,;b]$.

On suppose que $\forall x \in I,\ 0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\forall x \in I,\ g(x) < (1+\lambda)f(x)$.

Exercice 7. Étude d'une suite implicite
Soit, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $(E_n)\ :\ x^n = x + n - 1$ d'inconnue x sur $[1\,;+\infty[$.

Afin d'étudier l'équation (E_n), on pose $f_n : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n - x - n + 1$.

① Montrer que (E_n) admet une solution unique x_n.
② Montrer, pour $n \geqslant 2$, que $n - 1 \leqslant f_n(2) - f_n(1) \leqslant n2^{n-1} - 1$. En déduire : $f_n(2) \geqslant 0$ puis $x_n \in]1\,;2]$.
③ Déterminer un équivalent simple de $\ln(x_n)$, puis la limite ℓ de la suite (x_n).
④ Obtenir un équivalent simple de $x_n - \ell$.

Exercice 8. Étude d'une suite définie par une somme
Soit, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

① Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{1}{k+n+1} \leqslant \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \dfrac{1}{k+n}$.
② En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
③ Montrer que (u_n) est une suite convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9. Dériver une fonction réciproque
Démontrer que la fonction f suivante est bijective.

On note $f^{\langle -1 \rangle}$ sa bijection réciproque. Donner le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de $f^{\langle -1 \rangle}$.
① $f : [\pi\,;2\pi] \longrightarrow [-1\,;1],\ x \mapsto \cos x$ ② $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

Bilan du § 11

Prérequis

① Maîtriser le chapitre §2 Fonctions usuelles . . . . ☐
② Maîtriser le chapitre §7 Analyse asymptotique . . . . ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître par cœur la table 2.5 . . . . ☐
② maîtriser les rappels du §2 sur la continuité (1.1 : définition, théorèmes généraux, 1.2 : TVI) . . . . ☐
③ maîtriser les rappels du §2 sur la dérivation (2.1 : définition, 2.2 : théorèmes généraux) . . . . ☐
④ dérivée d'ordre supérieur, définition de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz : 2.3 . . . . ☐
 (a) exercice 3, exemple 8 . . . . ☐
 (b) continuité, la dérivabilité, d'une fonction en un point (exercices 2 et 3, exemple 10) . . . . ☐
⑤ connaître l'inégalité des accroissements finis (proposition 9) (hypothèses à maîtriser) . . . . ☐
 (a) savoir refaire l'exemple 12 . . . . ☐
 (b) savoir refaire les exercices 4, 5 . . . . ☐

Objectifs secondaires

① connaître le théorème 7 des accroissements finis (TAF) . . . . ☐
② connaître l'énoncé du théorème du maximum (et minimum) d'une fonction continue (1.3) . . . . ☐
③ connaître la remarque 11 sur le prolongement $\mathcal{C}^1$ d'une fonction . . . . ☐

Approfondissement

① Connaître le théorème 6 de Rolle . . . . ☐