§ 10 : Matrices

1. Opérations sur les matrices

1.1 Généralisation de la notion de vecteur

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

On rappelle que si E est un ensemble, $E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(x_1, \dots, x_n) \text{ tels que } \forall i = 1, \dots, n : x_i \in E\}$.

Notation 2. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés sous la forme de vecteurs colonnes : $(x_i)_{i=1\dots n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 1. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni d'une opération d'addition et d'une multiplication extérieure par un nombre (scalaire) de $\mathbb{K}$ ainsi :

$\forall u = (u_i)_{i=1..n} \in \mathbb{K}^n,\ \forall v = (v_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{K}^n,\ u + v = (u_i + v_i)_{i=1\dots n}$ et $\lambda u = (\lambda u_i)_{i=1\dots n}$

Ces opérations généralisent les opérations analogues des vecteurs du plans ($\mathbb{R}^2$) ou de l'espace ($\mathbb{R}^3$).

On dira plus tard qu'elles confèrent à $\mathbb{K}^n$ une structure de $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1.2 Notion de matrice

Définition 1. Une matrice A de n lignes et p colonnes est un élément de $(\mathbb{K}^n)^p$, elle est donc définie par np éléments de $\mathbb{K}$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Le nombre a_{ij} est le *coefficient* d'indice (i,j) de la matrice A.

La matrice A est parfois dite de *taille* ou de *format* (n,p) ou tout simplement *matrice* $n \times p$.

L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Lorsque $p = 1$, les matrices s'identifient aux vecteurs colonnes : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$.

Notation 3. On présente généralement la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & \text{j-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{i-ème ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{array}$$

On notera $A_{i*} = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant p} \in \mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ la matrice constituée de i-ème ligne de la matrice A.

De même $A_{*j} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est la matrice constituée de la j-ème colonne de la matrice A.

Exemple 1. À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ② $B = \begin{pmatrix} 1 & i & e \\ \pi & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ ③ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ④ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ⑤ $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⑥ $F = (3)$

Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i - j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$.

Définition 2. On adopte le vocabulaire suivant :

- $\star$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des *matrices carrées* de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\star$ $\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des *matrices lignes* de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\star$ $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ est l'ensemble des *matrices colonnes*, ou *vecteurs*, de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice triangulaire supérieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.
- $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice triangulaire inférieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.
- $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice diagonale* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
  On note alors $(a_{ij}) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.
- $\star$ $0_{np} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice nulle*, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
- $\star$ $\mathrm{Id}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la *matrice identité* : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1.
- $\star$ $E_{ij} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice élémentaire* dont le coefficient (i,j), qui vaut 1, est le seul non nul.

DÉFINITION 3. L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est muni d'une somme et d'un produit extérieur :

$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 2. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer $E + D$, $A - 3\mathrm{Id}_3$ et $i\,E_{1,2} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

1.3 Multiplication d'une matrice et d'un vecteur

DÉFINITION 4. Le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (p colonnes) avec un vecteur de $X = (x_j) \in \mathbb{K}^p$ est un vecteur $Y = (y_i) \in \mathbb{K}^n$, combinaison linéaire suivante des colonnes de A :

$$Y = AX = x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \ldots x_n A_{*n} \text{ soit } \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

EXEMPLE 3. À partir des matrices de l'exemple 1, calculer AC, $\mathrm{Id}_3 C$. Résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Expliquer sans poser le calcul pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1}$. Deviner une solution de $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{2,1}$.

Cette définition est motivée par les remarques suivantes :

REMARQUE 2 (Systèmes linéaires). Tout système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$, de n équations et à p inconnues, équivaut à une équation matricielle de la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice formée des coefficients du système, $X \in \mathbb{K}^p$ est le vecteurs colonne dont les composantes sont les inconnues du système et $B \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur formé des seconds membres des équations.

EXEMPLE 4. Vérifier : $AX = B \iff \left\{ \begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 3 (Applications définies par un produit matriciel). Des applications $\mathcal{L} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$, que nous qualifierons de linéaires, peuvent s'écrire sous la forme $\mathcal{L}(X) = AX$. Parmi elles, les rotations vectorielles, les symétries vectorielles, les homothéties vectorielles,....

Réciproquement, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, l'application $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p,\ X \mapsto AX$ est l'*application linéaire canoniquement associée à* A.

EXEMPLE 5. ✎ Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice A que l'on précisera telle que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ \mathcal{L}(X) = AX$.

Répondre à la même question pour $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Interprétation géométrique ?

1.4 Multiplication matricielle

Définition 5. On définit le produit d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice C de n lignes et q colonnes telle que $\forall j \in [\![1\,;q]\!],\ C_{*j} = AB_{*j}$. Ainsi :

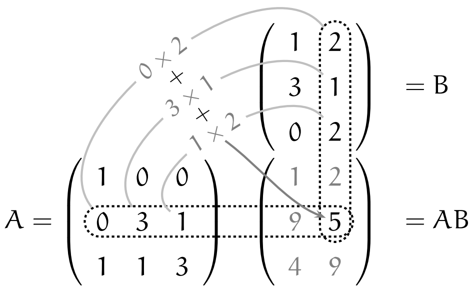
$$\forall A = (a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}).$$

⚠ On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

Remarque 4. En particulier le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est un nombre, égal à $\ell_1c_1 + \cdots + \ell_nc_n$.

Le coefficient (i,j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B.

On peut disposer les calculs ainsi :



Exemple 6. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer les produits :

① ED ② DE ③ AId_3 ④ $0_{2,3}A$ ⑤ EB ⑥ Que dire de BE ?

Proposition 1 (Propriétés intuitives du produit). Le produit matriciel ...

① est associatif : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC)$.

② est distributif à gauche par rapport à $+$: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+C) = AB + AC$.

③ est distributif à droite par rapport à $+$: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC$.

④ commute avec le produit externe : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Démonstration. Se vérifie à l'aide de la définition. □

Proposition 2. Propriétés pratiques du produit matriciel

Le produit matriciel ...

① vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ AId_p = A$ et $Id_nA = A$.

② Vérifie $\forall (a_i), (b_j) \in \mathbb{R}^p, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p) \times \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_p) = \operatorname{diag}(a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$.

③ Vérifie $\forall (a_i) \in \mathbb{R}^p, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p)]^n = \operatorname{diag}(a_1^n, \ldots, a_n^n)$.

④ Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$, alors $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k}$ avec $A^0 = B^0 = Id_n$.

⑤ n'est pas commutatif.

⑥ ne vérifie pas la propriété du produit nul.

Démonstration. Utiliser la définition du produit. Les produits DE et ED de l'exemple 6 justifient ⑤ et ⑥. □

Exemple 7. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M = Id + T$ en précisant la matrice T. En déduire M^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Matrice inversible

DÉFINITION 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *matrice inverse* de A une matrice B qui vérifie

$$AB = \mathrm{Id}_n = BA$$

La matrice B est alors notée A^{-1}.

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui admettent une inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 3. INVERSE D'UNE MATRICE

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

① A^{-1} est unique : si $BA = \mathrm{Id}_n$ ou $AB = \mathrm{Id}_n$ alors $B = A^{-1}$.

② $(A^{-1})^{-1} = A$

③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

④ si deux matrices non nulles C et D vérifient $CD = 0_{n,n}$, alors aucune n'est inversible.

Démonstration. Le faite qu'il suffise de prouver une seule des égalités $AB = \mathrm{Id}$ ou $BA = \mathrm{Id}$ sera prouvé ultérieurement. Les autres points sont de simples vérification de la définition 6. □

EXEMPLE 8. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M^2 - 3M + 2\mathrm{Id}_2 = 0_{2,2}$. En déduire M^{-1}.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Montrer que $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1.6 Matrice transposée

DÉFINITION 7. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La *transposée* de A est la matrice ${}^{t}A = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ où :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;n]\!],\ a'_{ij} = a_{ji}$$

La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

L'ensemble des *matrices symétriques* d'ordre n est $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ :\ A = {}^{t}A\}$.

L'ensemble des *matrices antisymétriques* d'ordre n est $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ :\ A = -{}^{t}A\}$.

EXEMPLE 9. ✎ Calculer la transposée de chacune des matrices de l'exemple 1.

PROPOSITION 4. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSPOSITION

On a :

① $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad {}^{t\,t}A = A$.

② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad {}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$.

③ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad {}^{t}(\lambda A + B) = \lambda\,{}^{t}A + {}^{t}B$.

④ $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\quad {}^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1}$.

Démonstration. À partir de la définition 7 □

EXEMPLE 10. Le produit scalaire s'exprime à l'aide de la transposée : vérifier que $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ u \cdot v = {}^{t}uv$.

1.7 Matrices d'opérations élémentaires

DÉFINITION 8. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice de lignes $(L_1, \dots, L_n)$. On appelle opérations élémentaires sur les lignes de M les opérations suivantes (où $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$) :

* ⋆ La permutation de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.
* ⋆ La multiplication par $\alpha \in \mathbb{K}^*$ de la ligne j : $\alpha L_i \to L_i$
* ⋆ La substitution de L_i par la combinaison $L_i + \alpha L_j$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$: $L_i + \alpha L_j \to L_i$

Définition 9. Pour tous $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on considère, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices dites d'opérations élémentaires :

① $p_{ij} = \mathrm{Id}_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ (matrices de permutation)

② $d_i(\alpha) = \mathrm{Id}_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ (matrices de dilatation, $\alpha \in \mathbb{K}$)

③ $t_{ij}(\alpha) = \mathrm{Id}_n + \alpha E_{ij}$ (matrices de transvection, $\alpha \in \mathbb{K}$)

Proposition 5. On vérifie que les opérations élémentaires sur les lignes de la définition 8 s'obtiennent par la multiplication à gauche de la matrice d'opération élémentaire correspondante de la définition 9.

Démonstration. ✎ Le vérifier lorsque $n = 3$. □

Exemple 11. ✎ Montrer que les matrices de la définition 9 sont inversibles et déterminer leurs inverses.

2. Systèmes linéaires

2.1 Matrice d'un système

Définition 10. On appelle *système linéaire* (S) de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients et $(b_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$, le *second membre*. La i-ème ligne est l'équation i, et les $x_1, \dots, x_p$ sont les p *inconnues*.

Résoudre le système (S), c'est trouver l'ensemble des $(x_j)_{j=1,\dots,p}$ qui vérifient le système (S).

Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont les mêmes solutions.

Remarque 5. Le système (S) de la définition 10 équivaut à l'équation matricielle $AX = B$ où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice du système* (S), $X = (x_i) \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur inconnu et $B = (b_j) \in \mathbb{K}^p$ le second membre.

Le tableau $A|B$ est la matrice augmentée du système (S).

Proposition 6.

Soit M une matrice inversible. Alors les systèmes de matrices augmentées $A|B$ et $MA|MB$ sont équivalents. En particulier, appliquer des opérations élémentaires de la section 1.7 aux lignes d'un système le transforme en un système équivalent.

Démonstration. Si $AX = B$ alors $MAX = MB$. Réciproquement, si $MAX = MB$, en multipliant par M^{-1} à gauche, $AX = B$. □

2.2 Méthode du pivot

On peut résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients. Une manière commode de présenter les choses est la suivante :

Méthode 1. Algorithme du pivot de Gauss total

Pour résoudre le système (S) :

① on écrit la matrice augmentée du système

② on choisit parmi les coefficients non nuls un pivot $a_{i,j}$, que l'on entoure, dans une ligne et une colonnes qui ne contiennent pas d'autre pivot. Si c'est impossible on passe à l'étape ⑤

③ on réécrit le tableau en remplaçant chaque ligne L_k $(k \neq i)$ par $L_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} L_i$.

④ on reproduit l'étape ②

⑤ On conclut en fonction de la situation :

(a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, sauf son second membre : le système n'a pas de solution.

(b) sinon, toutes les inconnues dans les colonnes sans pivot sont des paramètres, et peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{K}$. On écrit le système correspondant au tableau final avec les inconnues, et on exprime les solutions en isolant les inconnues des colonnes à pivot.

On peut à chaque étape, si cela simplifie le calcul, choisir de permuter deux lignes, ou de multiplier une ligne par une constante non nulle.

Exemple 12. $(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$. On applique la méthode du pivot :

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1-L_2 \to L_1} \left.\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1-L_3 \to L_1, L_2+\frac{1}{2}L_3 \to L_2} \left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{array}\right.$$

L'algorithme s'arrête (plus de pivot), on est dans la situation où le système admet des solutions (second membre nul en face des lignes de 0). La variable x est un paramètre (elle peut prendre n'importe quelle valeur réelle t). L'ensemble (infini) des solutions est formé des (x, y, z) tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ \frac{5}{2}x + z & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccll} x & = & & t \\ y & = & 1 & -\frac{3}{2}t \\ z & = & 1 & -\frac{5}{2}t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ce résultat s'interprète ainsi : l'intersection des trois plans dont les équations sont les lignes du système est la droite passant par $A(0;1;1)$ et dirigée par $\vec{u}(1;-\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$.

Remarque 6. La méthode consistant à remplacer le système par un système équivalent (obtenu par combinaisons de lignes), l'ensemble des solutions obtenu est le même quelque soit le choix des pivots.

Remarque 7. Une méthode alternative, (algorithme partiel du pivot), consiste à n'effectuer l'étape ③ que pour les lignes sans pivot. On obtient dans l'étape ⑤b un système triangulaire que l'on résout par substitution.

Exemple 13. Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot. Les trois premiers sont d'inconnues (x, y, z), le quatrième d'inconnues (x, y) et le dernier d'inconnue t. Interpréter géométriquement les résultats.

① $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \\ 3x+z & = & 2 \end{array}\right.$ ② $x+y-z=1$ ③ $\left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=2 \\ z-x=3 \end{array}\right.$ ④ $\left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & 1 \\ x+2y & = & 1 \\ x+8y & = & 1 \end{array}\right.$ ⑤ $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1-2t \end{array}\right.$

2.3 Aspects théoriques de la méthode du pivot

Remarque 8. Si on obtient r pivots en résolvant un système de n équations à p inconnues, nécessairement $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$: il n'y a qu'un pivot par ligne et colonnes.

Remarque 9. Si un système de n équations à p inconnues admet une unique solution, nécessairement le nombre r de pivots obtenus par la méthode de Gauss est égal à p. (sinon $r < p$ et on a des paramètres que l'on peut choisir arbitrairement, donc une infinité de solution).

Remarque 10. Soit (S) un système linéaire admettant des solutions, d'inconnues $x_1, \dots, x_p$. Si, après la méthode du pivot, on obtient m paramètres $x_1, \dots, x_m$ $(m \leqslant p)$, chaque solution du système $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est déterminée par un et un seul choix des paramètres $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$.

Proposition 7. Rang d'un système linéaire

Le nombre de pivots obtenus dans la résolution d'un système par la méthode de Gauss ne dépend pas du choix des pivots. Ce nombre est appelé le *rang du système.*

Démonstration. On suppose que l'on a résolu un système (S) par la méthode du pivot, avec k pivots. En notant $x_1, \dots, x_{p-k}$ les paramètres et en ajoutant au système les équations $x_1 = \cdots = x_{p-k} = 0$, on obtient un système ayant une unique solution d'après la remarque 10. Donc p pivots.

Par l'absurde, si une résolution donne ℓ pivots, avec $\ell < k$, en poursuivant la résolution du système augmenté des équations $x_1 = \cdots = x_{p-k} = 0$, on a au plus $\ell + p - k < p$ pivots, donc pas une solution unique (remarque 9), ce qui est contradictoire. Donc $\ell \geqslant k$. En permutant les rôles de ℓ et k, on montre finalement $\ell = k$. □

2.4 Application à l'inversion d'une matrice

On recherche l'inverse d'une matrice A en appliquant la méthode du pivot à la matrice augmentée $A|\mathrm{Id}_n$:

Méthode 2. Inverser une matrice

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. En notant I_j la j-ème colonne de Id_n et C_j la j-ème colonne de A, $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$ équivaut à $AC_j = I_j$ pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. On obtient ainsi A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss, en résolvant le système précédent avec comme second membre Id_n. Si à l'issue du pivot on a obtenu la matrice identité à gauche, la matrice de droite est A^{-1}.

Exemple 14. On souhaite inverser : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot :

$$\left.\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_1 - 2L_3 \to L_1} \left.\begin{matrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[L_3 + L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \left.\begin{matrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}L_2 \to L_2]{-L_1 \to L_1} \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 15. ✎ Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5 Rang d'une matrice

Proposition 8. Rang d'une matrice

Le *rang d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang du système $AX = 0_p$. On a :

① $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ si et seulement si les colonnes de A sont coplanaires.

② $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ si et seulement si les colonnes de A sont colinéaires.

③ $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

④ $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si $X \mapsto AX$ est surjective.

⑤ $\mathrm{rg}(A) = p$ si et seulement si $X \mapsto AX$ est injective.

⑥ $\mathrm{rg}(A) = n = p$ si et seulement si A est inversible (et $X \mapsto AX$ est bijective).

Exemple 16. ✎ Donner des exemples de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de rang 0, de rang 1, de rang 2 puis de rang 3.

Bilan du § 10

Prérequis

① §1 Logique : Récurrence, formule du binôme, coefficients binomiaux

② §4 Géométrie du plan : équation cartésienne et systèmes paramétriques de droites.

③ §8 Géométrie dans l'espace : équations et systèmes paramétriques de droites, de plans.

Objectifs prioritaires

① savoir effectuer un produit de matrices, en maîtriser les propriétés (section 1.4) .... ☐
  (a) exemples 6 et 7 .... ☐
  (b) exercice 5, 7 et 6 .... ☐

② savoir les propriétés et la définition de l'inverse d'une matrice (section 1.5) .... ☐
  (a) savoir calculer une inverse par la méthode du pivot (section 2.4) et exemple 15 .... ☐
  (b) exercice 7 .... ☐

③ savoir former la matrice d'une application linéaire et connaître ses propriétés (remarque 3) .... ☐
  (a) exemple 5 .... ☐

④ savoir résoudre un système linéaire par la méthode du pivot (2.2) .... ☐
  (a) savoir refaire les exemples 12 et 13 .... ☐
  (b) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐

Objectifs secondaires

① connaître la définition et les propriétés de la transposée : 1.6 .... ☐

Approfondissement

① connaître les définitions théoriques (par exemple la définition 5 du produit), ... ☐

② connaître les matrices d'opérations élémentaires (section 1.7) .... ☐

TD du § 10

Exercice 1. Résolution de systèmes dépendant d'un paramètre
Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre m :

① $\left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & y & = & 2m-1 \\ x & + & my & = & 1 \end{array}\right.$ ② $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & my & + & z & = & m-1 \\ mx & - & my & + & z & = & m^2-1 \end{array}\right.$

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires

Résoudre le système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccccc} (1+i)x & & & + & iz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & iy & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 3. Tétraèdres isopérimétriques
Montrer que les faces d'un tétraèdre isopérimétrique (ses faces sont des triangles de même périmètre) sont des triangles isométriques.
On pourra noter p le périmètre des faces d'un tétraèdre $ABCD$ et $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = AD$, $b' = BD$ et $c' = CD$, et résoudre un système linéaire de 4 équations à 6 inconnues.

Exercice 4. Inversibilité d'une matrice à paramètre ATS 2010
Pour quelles valeurs du réel m la matrice suivante est–elle inversible ? Donner son rang en fonction de m.
$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & 2m \\ 2 & m & 2m+1 \\ -1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Puissances d'une matrice diagonalisable
On présente une méthode pour calculer les puissances d'une matrice semblable à une matrice diagonale.

① Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On pose $D = P^{-1}MP$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = PD^kP^{-1}$.
② Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
③ Calculer M^k pour tout entier naturel k.

Exercice 6. Puissances d'une matrice unipotente

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = T - \mathrm{Id}_3$.

① Calculer N^k pour tout entier naturel k.
② En déduire T^k à l'aide de la formule du binôme, dont on justifiera l'emploi.

Exercice 7. Groupe orthogonal spécial du plan euclidien
Le plan euclidien est identifié à $\mathbb{R}^2$ via une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel θ, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

① Reconnaître R_0. Démontrer que pour tous réels α et β, on a : $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.
En déduire que : $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$, et que $\star$ R_α est inversible, d'inverse $R_{-\alpha}$.
② Soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $u \in \mathbb{R}^2$ le vecteur colonne de coordonnées x et y et u' le produit $u' = R_\theta u$.
Montrer que $\|u'\| = \|u\|$. Calculer le produit scalaire $\langle u|u' \rangle$ et le déterminant $\det(u, u')$.
En déduire que $R_\theta u$ est l'image de u par la rotations vectorielles d'angle θ (et de centre O).

Exercice 8. Polynôme annulateur d'une matrice 2×2

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

① Vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)\mathrm{Id}_2 = 0_{2,2}$.
② En déduire que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, obtenir alors une expression de A^{-1}.
③ Une matrice A est dite idempotente si et seulement si $A^2 = A$.
Donner l'ensemble des matrices idempotentes. Donner trois exemples.

Exercice 9. Matrices nilpotentes

Une matrice carré A est dite nilpotente s'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $A^r = 0$.

① Démontrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

② Soit A une matrice nilpotente. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Id} - A)\sum_{k=0}^{p} A^k = \mathrm{Id} - A^{p+1}$.

En déduire que $\mathrm{Id} - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

③ En déduire que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Centre d'un groupe de matrices unipotentes

Soit $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

① Démontrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

② Vérifier que tout élément de $\mathcal{E}$ est inversible et a son inverse dans $\mathcal{E}$.

③ Le centre de $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{E},\ \forall M \in \mathcal{E},\ MA = AM\}$. Déterminer $\mathcal{C}$.

Exercice 11. Diviseurs de zéro et inversibilité

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet des diviseurs de zéro si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AB = 0$.

On va démonter qu'une matrice admet des diviseurs de zéro si et seulement si elle n'est pas inversible.

① Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui admet des diviseurs de zéro.

② On suppose A inversible et $AB = 0$. Montrer qu'alors $B = 0$.

③ On suppose que A n'est pas inversible. Justifier l'existence d'un vecteur v non nul tel que $Av = 0$.

En déduire une matrice B non nulle telle que $AB = 0$.

④ Conclure.

Exercice 12. Calcul élémentaire des puissances d'une matrice et système récurrent linéaire

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

① Exprimer M^2, M^3 et M^4 en fonction de M.

② Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de M^n en fonction de n. Démontrer la conjecture par récurrence.

③ Vérifier que $\forall n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$. Exprimer alors A^n en fonction de n.

④ On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n \end{array} \right.$

De ce qui précède, déduire une expression de (u_n) et (v_n) en fonction de $n \geqslant 0$.

Exercice 13. Système récurrent linéaire guidé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 3v_n \end{array} \right.$.

① Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, le vecteur X_n de $\mathbb{R}^2$ de composantes u_n et v_n.

Donner une matrice A vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

② Soit $N = A - 2\mathrm{Id}$. Calculer N^2. En déduire une expression de A^n en fonction de n.

③ Exprimer enfin X_n en fonction de A, X_0 et $n \in \mathbb{N}$, puis u_n et v_n en fonction de n.