§ 1 : Langage mathématique

1. Introduction

1.1 Faire des mathématiques ?

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. » Euclide

Les *Éléments* est un recueil de 13 ouvrages traitant de géométrie et de théorie des nombres, vraisemblablement écrit par le mathématicien grec Euclide (vers -300). Cet øuvre est organisée autour d'énoncés d'axiomes, de définitions, de conjecture, de théorèmes [1] et surtout de démonstrations. Cette nécessité de preuve logique deviendra l'un des fondements des mathématiques telles qu'on les pratique aujourd'hui.

Faire des mathématiques, c'est établir des conjectures dignes d'êtres prouvées (parce qu'elles sont utiles aux mathématiques ou aux autres disciplines, ou encore parce qu'elles sont élégantes) et les démontrer.

Afin d'êtres compréhensibles par tous, les assertions et leurs éventuelles démonstrations doivent être rédigées en suivant une logique rigoureuse.

L'un des objectifs de ce chapitre est de rappeler les bonnes pratiques de rédaction.

1.2 Ce qu'il ne faut pas faire !

Voici un petit problème et deux réponses de lycéens à ce problème :

Problème 1.

① Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x-1} = x(x-2)$.

② Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x-1} = 2x^2$.

Réponse de l'élève Leonhard :

① On prend $x = 3$: $\dfrac{3^3-3\times 3^2+2\times 3}{3-1} = 3 = 3\times(3-2)$: c'est vrai.

② Dans (E), on remplace x par 0 : $\dfrac{0^3-3\times 0^2+2\times 0}{0-1} = -\dfrac{0}{1} = 0 = 2\times 0^2$. Donc la solution de (E) est 0.

Réponse de l'élève Évariste :

① $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x-1} = x(x-2)$; $x(x^2-3x+2) = x(x-2)(x-1)$; $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$;
$x^2-3x+2 = x^2-x-2x+2$; $x^2-3x+2 = x^2-3x+2$: l'égalité est vraie.

② On multiplie les deux membres de (E) par $x-1$: $x^3-3x^2+2x = 2x^3-2x^2$.

Ainsi, $-x^3-x^2+2x = 0$ donc en factorisant $x(-x^2-x-2) = 0$. Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Ainsi, $x = 0$ ou $-x^2-x+2 = 0$. Le discriminant de la deuxième équation est $9 > 0$, elle admet donc deux solutions : 1 et -2. Finalement l'équation (E) admet trois solutions : 0, 1 et -2.

✎ Relever les erreurs de raisonnements et les problèmes posés par la rédaction des réponses ① des deux élèves.

---

(1). Rappelons qu'un axiome est une règle que l'on ne démontre pas et qui sert de fondement à la théorie, qu'une *définition* permet de nommer certains objets mathématiques, ou certaines propriétés, afin de les utiliser plus facilement pour formuler certaines assertions : une *assertion* est une phrase mathématique qui peut-être vraie ou fausse.

Une assertion vraie est une *proposition*. Il y a plusieurs sortes de propositions : certaines, particulièrement importantes, méritent le nom de *théorèmes*. D'autres, qui ne sont que des étapes dans la démonstration de théorèmes sont appelées *lemmes*. On appelle enfin *corollaires* les conséquences simples de théorèmes plus importants.

Une *conjecture* est une assertion dont on pense qu'elle est vraie, mais qui n'a pas encore été démontrée. Une conjecture n'est donc pas encore une proposition.

2. Quantificateurs

Une assertion (affirmation mathématique) dont les variables ne sont pas définies (par exemple « $x \geqslant 0$ ») n'a pas de sens : on ne peut pas évaluer sa valeur de vérité. Les quantificateurs ($\forall$, $\exists$) et la relation d'appartenance ($\in$) permettent d'introduire rigoureusement les variables utilisées :

2.1 Quantifier les variables

NOTATION 1. Les quantificateurs sont :

Le *quantificateur universel*, noté $\forall$, se lit « quelque soit... » ou « pour tout... ».

Le *quantificateur existentiel* noté $\exists$, se lit « il existe (au moins) un ... ».

On rencontre parfois « $\exists!$ » qui se lit « il existe exactement un ... ».

⚠ ces symboles ne doivent pas servir d'abréviation dans une phrase.

EXEMPLE 1. ✎ Vrai ou faux ? ① « $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$ » ② « $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0$ » ③ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$ »

MÉTHODE 1. Prouver une propriété universelle

La démonstration d'une proposition universelle (une assertion vraie commençant par un quantificateur universel) débute par un quantificateur universel et doit être générale : un exemple ne suffit pas (c'est l'erreur de Leonhard dans sa réponse ①).
Ainsi, la réponse à une question : « Démontrer que pour tout x réel ... » ou « Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}$, ... » commencera souvent par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. » ou « $\forall x \in \mathbb{R}$ »...

MÉTHODE 2. Prouver une propriété existentielle

Au contraire, pour démontrer une proposition existentielle, il suffit généralement de construire un exemple.

2.2 Exemple de propriété universelle : l'identité

MÉTHODE 3. Démontrer une identité

Pour démontrer une identité (une équation vraie pour toutes valeurs de sa variable),

① on introduit toutes les variables intervenant avec « soit » ou « pour tout » ou $\forall$ (méthode 1),

② on part d'un membre de l'égalité (souvent le plus compliqué, que l'on peut simplifier, développer ou réduire au même dénominateur),

③ après une succession d'égalités, on aboutit à l'autre,

④ on conclut par une phrase.

Si on échoue, on peut essayer de transformer séparément les deux membres pour aboutir au même résultat.

EXEMPLE 2. ✎ Vérifier que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Corriger la question ① du problème 1.

2.3 Ordre et négation des quantificateurs, contre-exemples

REMARQUE 1 (ordre des quantificateurs). On peut intervertir deux quantificateurs identiques, mais :

⚠ on ne peut pas intervertir deux quantificateurs différents.

EXEMPLE 3. ✎ Écrire en français les assertions suivantes. Préciser, en justifiant, si elles sont vraies ou fausses.
① « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$ ». ② « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$ ».

REMARQUE 2 (négation et quantificateurs). Lorsqu'on nie une assertion, on échange les quantificateurs existentiels et les quantificateurs universels.

En particulier, pour réfuter une assertion universelle, il suffit d'exhiber un contre-exemple (méthode 2).

EXEMPLE 4 (Ensemble majoré). ✎ Un ensemble E de réels *majoré* vérifie : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ y \geqslant x$.

Écrire avec des quantificateurs la définition d'un ensemble non majoré.

Vérifier que l'intervalle $[0\,;+\infty[$ n'est pas majoré.

2.4 Ensembles

On utilise des notations standards pour définir les ensembles et en désigner certains :

Notation 2. On peut décrire un ensemble par

- ⋆ extension, en listant ses éléments entre accolades : $E = \{0\,; e\,; -3\}$
- ⋆ compréhension, comme la partie d'un ensemble dotée d'une propriété : $S = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$

Notation 3. Des exemples d'ensembles classiques sont :

① l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.

② l'ensemble des nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0\,; 1\,; 2\,; 3\,; \dots\}$

③ l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -2\,; -1\,; 0\,; 1\,; 2\,; \dots\}$

④ les intervalles de nombres entiers $[\![3\,; 7]\!] = \{3\,; 4\,; 5\,; 6\,; 7\}$

⑤ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (quotients de nombres relatifs)

⑥ l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et les irrationnels comme $\pi, e, \sqrt{2}, \dots$

⑦ les intervalles : $]3\,; 7] = \{x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leqslant 7\}$, $[3\,; +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x\}, \dots$

⑧ l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{a + ib,\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\}$ où i vérifie $i^2 = -1$.

⚠ on ne confondra pas $\{0\,; 1\}$ (ne contient que 0 et 1) et l'intervalle $[0\,; 1]$ (contient tous les réels entre 0 et 1).

Définition 1. Soient A et B deux ensembles.

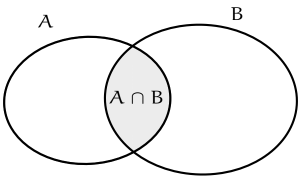
① Si tout élément de A est aussi un élément de B, on dit que A est *inclus* dans B, ce que l'on note $A \subset B$.

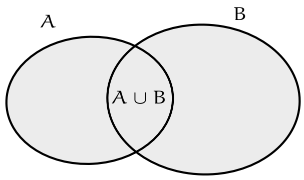
② L'intersection de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cap B \iff (x \in A$ et $x \in B)$.

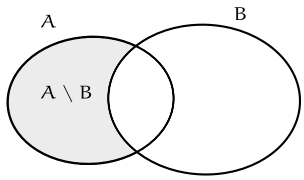
③ La réunion de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cup B \iff (x \in A$ ou $x \in B)$.

④ L'ensemble A privé de B est défini par $x \in A \setminus B \iff (x \in A$ et $x \notin B)$.

⑤ Si $A \subset B$, le complément de A dans B est $\bar{A} = \complement_B A = B \setminus A$.







Exemple 5. On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Si $\mathbb{K}$ est l'un de ces ensembles, on note $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. De même, $\mathbb{R}_+ = [0\,; +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty\,; 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0\,; +\infty[\dots$

Exemple 6. ✎ Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'*ensemble des parties* de E : l'ensemble des ensembles inclus dans E. Décrire $\mathcal{P}([\![1\,; 3]\!])$.

Définition 2. Étant donnés deux ensembles A et B, le *produit cartésien* $A \times B$ de A est de B est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

On définit de même des produits cartésiens contenant davantage de facteurs.

On note aussi $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$,... Et on qualifie de p-*liste* tout élément de A^p.

Exemple 7. On peut définir l'ensemble des vecteurs du plan réel par le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$.

3. Implications et équivalences

3.1 Implication, contraposée et réciproque

> DÉFINITION 3 (Implication). Une *implication* est une assertion de la forme « si $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{Q}$ ».
>
> On dit encore que $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* pour $\mathcal{Q}$, ou que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* à $\mathcal{P}$.
>
> En écriture symbolique : $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

REMARQUE 3 (Contraposée). Une implication « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » est vraie si et seulement si son implication *contraposée* « $\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})$ » est vraie.

Pour prouver une implication, on peut donc démontrer son implication contraposée.

EXEMPLE 8 (Fonction impaire). ✎ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est impaire, alors $f(0) = 0$. En déduire que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$ n'est pas impaire.

REMARQUE 4 (Réciproque). ⚠ L'implication n'est pas commutative ! L'implication « $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ » est appelée l'*implication réciproque* de « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ». Les valeurs de vérités d'une implication et de sa réciproque sont a priori indépendantes.

EXEMPLE 9. ✎ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La réciproque de « si f est impaire, alors $f(0) = 0$ » est–elle vraie ? Justifier.

EXEMPLE 10. ✎ Énoncer le théorème de Pythagore, sa réciproque et sa contraposée.

Un triangle dont les côtés mesurent 5, 13 et 12 est–il rectangle ? Et s'ils mesurent 2, 3 et 4 ?

Préciser à chaque fois l'implication utilisée.

3.2 Équivalence

> DÉFINITION 4 (Équivalence). Une *équivalence* est une assertion de la forme $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$.
>
> On dit encore que $\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$ ou que « $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante à $\mathcal{Q}$ ».
>
> On abrège parfois « si et seulement si » en « $\mathcal{P}$ ssi $\mathcal{Q}$ ».
>
> Symboliquement on note « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ (ce qui signifie « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ »).

REMARQUE 5. ⚠ ne pas confondre « $=$ » (relation d'égalité entre deux expressions) et « $\iff$ » (connecteur logique signifiant « si et seulement si », qui n'intervient pas dans la démonstration d'égalités).

En cas de confusion, remplacer l'usage de « $\iff$ » par « ssi ».

> DÉFINITION 5. Une *équation* est une égalité qui contient une ou plusieurs variables, dites *inconnues*. *Résoudre* une équation (E) d'inconnue x, c'est trouver un ensemble S (dit *ensemble de solutions*) tel que $(E) \iff x \in S$.

EXEMPLE 11. ✎ Les conclusions des deux réponses d'élève à la question ② du problème 1 sont fausses. Quelles sont les conclusions sérieuses que l'on peut apporter à leur travail ?

Compléter la production d'Évariste pour rendre son travail correct.

3.3 Exemple d'utilisation des équivalences : la résolution d'une équation

REMARQUE 6. On obtient une équation équivalente à une équation (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) en :

- ⋆ ajoutant (ou soustrayant) le même nombre à chacun des deux membres.
- ⋆ multipliant (ou divisant) par le même nombre *non nul* chacun des deux membres.
- ⋆ simplifiant l'un ou l'autre des deux membres.
- ⋆ en appliquant une fonction *injective* (voir la définition 7) à chacun des deux membres.

On résout les équations simples par équivalences en annonçant ce que l'on fait (« on résout $2x+4=0$ sur l'ensemble des réels »), puis en on obtenant l'ensemble des solutions par une successions d'équivalences (« $2x+4=0$ ssi $2x=-4$ ssi $x=-2$ »), et enfin en concluant par une phrase. (« l'ensemble des solutions est $\{-2\}$ »)

Méthode 4. Résolutions

Pour résoudre une équation plus compliquée :

- ⋆ on obtient une équation ou une inéquation équivalente avec un membre nul.
- ⋆ on réduit au même dénominateur et on factorise l'expression.
- ⋆ on utilise la propriété : « un produit est nul si et seulement si l'un des ses facteurs est nul ».

Remarque 7. Si on interrompt le raisonnement par équivalences en utilisant des déductions (« donc »), il faut impérativement vérifier les solutions avant de conclure. (c'est l'erreur d'Évariste dans sa réponse ② au problème 1) Quand c'est possible, vérifier les solutions dans l'équation de départ est toujours une bonne idée !

Exemple 12. ✎ Résoudre rapidement la question ② du problème 1.

4. Applications

4.1 Légitimer le parachutage de solutions

Problème 2. Résoudre $e^x = x+1$.

On peut deviner une solution de ce problème. Cependant, on ne peut pas prétendre le résoudre simplement en « parachutant » la solution devinée : on pourrait en oublier d'autres, comme Leonhard répondant à la question ① du problème 1.

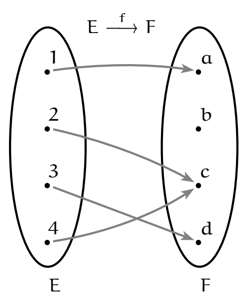
✎ À partir du tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$, justifier que l'équation du problème 2 n'admet qu'une solution. Puis conclure.

On est donc amené à introduire la notion de fonction (ou d'application), et certaines de ses propriétés relatives au nombre de solution de l'équation $f(x) = y$:

4.2 Notion d'application

Définition 6. Définir (2) une *application* f (ou fonction (3)), c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F.

- ⋆ E est appelé l'*ensemble de définition* de f.
- ⋆ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⋆ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'*image* de x par l'application f.
- ⋆ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.



Exemple 13. On a schématisé ci-contre la définition d'une fonction f définie sur l'ensemble $E = [\![1\,;4]\!]$ et à valeurs dans $F = \{a; b; c; d\}$
L'image de 3 par f est d.
L'ensemble des antécédents de c par f est $\{2; 4\}$.
L'ensemble des antécédents de b par f est vide : $\varnothing$.

Exemple 14. Sur tout ensemble E non vide, on peut définir l'application *identité* par $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

(2). la définition rigoureuse d'une application est la donnée d'un triplet d'ensembles (E, F, G) où $G \subset E \times F$ vérifie $\forall x \in E,\ \exists!(x; y) \in G$, et on pose alors $f(x) = y$.
(3). On ne fait pas de différence ici entre une application ou une fonction. Dans certains textes, une fonction associe *au plus* un élément de l'ensemble d'arrivée à tout élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de définition peut alors être plus petit que l'ensemble de départ.

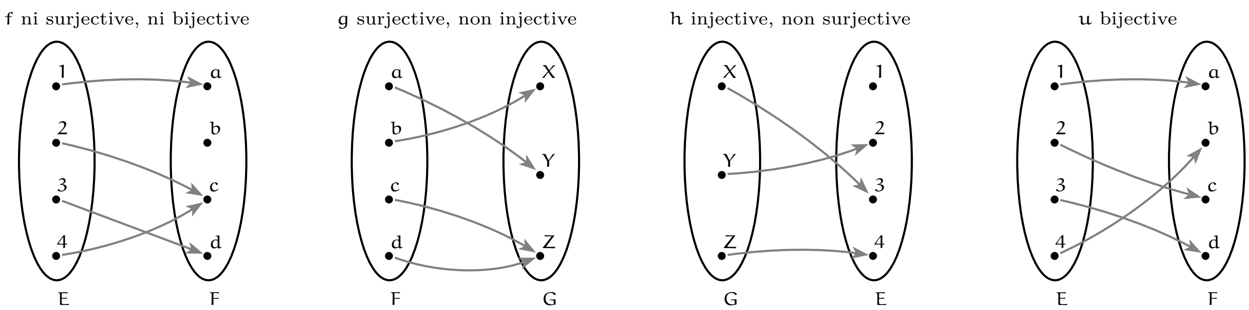
Remarque 8. On définira souvent une fonction par son expression :

$$c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

signifiant que c est définie sur $E = \mathbb{R}$, à valeurs dans $F = \mathbb{R}_+$, et associe (flèche spéciale $\mapsto$) à tout x réel sont carré x^2.

Définition 7. Une application $f : E \to F$ est dite

- ⋆ *surjective*, ssi tout élément de F a *au moins* un antécédent : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
- ⋆ *injective*, ssi tout élément de F a *au plus* un antécédent : $\forall (x, z) \in E^2, f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$.
- ⋆ *bijective*, ssi tout élément de F a *exactement* un antécédent : f est surjective et injective.



Remarque 9. on commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Exemple 15. ✎ L'application $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

En changeant seulement son ensemble de départ ou d'arrivée, définir à partir de l'application c une application injective mais pas surjective, puis surjective mais pas injective et enfin, bijective.

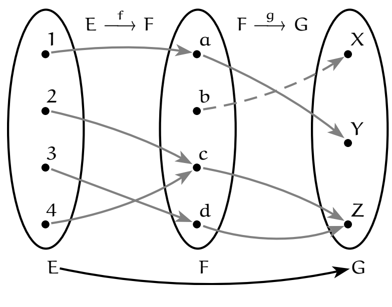
Proposition 1.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

- ⋆ si f est strictement croissante ($\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) < f(y)$) alors f est injective.
- ⋆ si f est strictement décroissante ($\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) > f(y)$) alors f est injective.

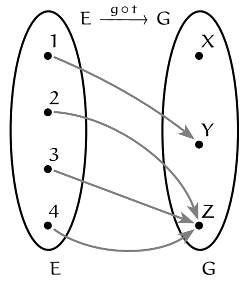
Démonstration. ✎ On peut raisonner par la contraposée (ou par l'absurde) □

4.3 Composition



Définition 8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La *composée* de g et f est l'application

$$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$



Exemple 16. Dans l'exemple ci-contre, $f(4) = c$ et $g(c) = Z$ donc $g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = Z$.

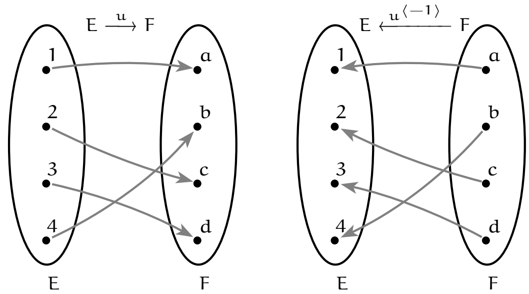
Exemple 17. ✎ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$. Donner une expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

⚠ : la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Définition 9. Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{\langle -1 \rangle}(y)$ l'unique antécédent de y par f. L'*application réciproque* de f est l'application

$$f^{\langle -1 \rangle} : F \to E, \ y \mapsto f^{\langle -1 \rangle}(y)$$

Par définition, $f^{\langle -1 \rangle} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{\langle -1 \rangle} = \mathrm{Id}_F$.



Exemple 18. ✎ Donner des exemples de fonctions bijectives et de leurs réciproques.

5. Nombres entiers et dénombrement

5.1 Nombres entiers et raisonnement par récurrence

Problème 3. On définit une suite de nombres par $u(1) = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u(n+1) = \dfrac{u(n)}{1+u(n)}$. Que vaut $u(1\,000\,000)$?

On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{N}$ et appelé ensemble des entiers naturels, dont chaque élément $n \in \mathbb{N}$ admet un et un seul successeur (noté $n+1$), contenant un élément noté 0 qui n'est successeur d'aucun autre, et vérifiant la proposition 2. [4].

Proposition 2. Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n, qui peut être vraie ou fausse. Si
- ⋆ (initialisation) $\mathcal{P}(n_0)$ est vrai pour un entier n_0,
- ⋆ (transmission) $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Intuitivement, à partir de $\mathcal{P}(n_0)$ vrai, que l'on démontre à l'étape d'initialisation, et en appliquant en cascade les implications $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ démontrées dans la transmission, on peut prouver $\mathcal{P}(n)$ pour n aussi grand que voulu.

À partir de $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(0) \xRightarrow{\text{transmission}, n=0} \mathcal{P}(1)$, on a $\mathcal{P}(1)$, puis $\mathcal{P}(2)$ grâce à $\mathcal{P}(1) \xRightarrow{\text{transmission}, n=1} \mathcal{P}(2)$, ...

Méthode 5. Rédiger une récurrence

En pratique :

1. on énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ à prouver.
2. initialisation : on démontre l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$
3. transmission : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour *un* entier $n \geqslant n_0$, et on déduit de cette hypothèse la propriété au rang $n+1$: $\mathcal{P}(n+1)$.
4. conclusion : on affirme que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 19. ♡ On veut montrer que la suite u définie dans le problème 3 vérifie $u(n) = 1/n$.

⋆ Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété « $u_n = 1/n$ ».

⋆ Initialisation : d'une part $u(1) = 1$ et d'autre part $1/1 = 1$ donc la propriété est vrai au rang $n = 1$.

⋆ Transmission : on fait l'hypothèse que la propriété « $u(n) = 1/n$ » est vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé.

On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$: « $u(n+1) = \dfrac{1}{n+1}$ ».

$u(n+1) \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{u(n)}{1+u(n)} \overset{\text{Hyp}}{=\!=} \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

(4). on peut construire cet ensemble à partir d'axiomes plus élémentaires de la théorie des ensembles, mais cette construction est hors programme

⋆ Conclusion : par récurrence, « $u_n = 1/n$ » pour tout entier $n \geqslant 1$. □

Remarque 10. Ce raisonnement est souvent source d'erreurs :

- ⋆ ⚠ avant de l'utiliser, vérifier qu'il n'existe pas de démonstration directe.
- ⋆ ⚠ si, au cours de la transmission, on prouve la propriété au rang $n+1$ sans utiliser l'hypothèse de récurrence, cela signifie que l'on peut prouver directement le résultat.
  Dans ce cas, on n'utilise pas le raisonnement par récurrence, mais une preuve directe.
- ⋆ ⚠ si la propriété à démontrer ne dépend pas d'un entier, mais par exemple d'un nombre réel, la démonstration par récurrence est impossible !
- ⋆ ⚠ si, dans la transmission, on suppose la propriété vraie pour « *tout* n » au lieu de « un n », la démonstration n'a plus de valeur, car on a supposé vrai le résultat que l'on voulait prouver !

Exemple 20. ✎ Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité : « $2^n \geqslant n+1$ ».

5.2 Sommes et produits d'indices entiers

Notation 4. Soient les nombres $a_0, \dots, a_n$. On pose [(5)] :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

Remarque 11 (Variables muettes). Dans la notation 4, la lettre « k » est l'*indice* de la somme. Elle est *muette*, on peut la remplacer par n'importe quel symbole (non utilisé auparavant).

Les variables muettes sont définies dans une notation spécifique : on ne doit pas les introduire par des quantificateurs.

En voici d'autres : le n de $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n}$; le t de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$; le x de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2+1)$ ...

Exemple 21. ✎

① Écrire avec des pointillés les sommes : $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{50} k^2$, $\quad B = \displaystyle\sum_{p=1}^{2015} e^{\sqrt{p}}$

② Écrire avec Σ : $C = \ln(2)+\ln(3)+\cdots+\ln(42)$, $D = 2+4+6+\ldots 50$, $E = \dfrac{1}{1+2}+\dfrac{2}{2+3}+\ldots\dfrac{3\,000}{3\,000+3\,001}$

③ Donner le nombre de termes de chacune des sommes A, B, C, D et E.

④ Calculer le produit $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \frac{i+1}{i+2}$

⑤ Écrire les sommes suivantes, de sorte que le premier indice soit 0 : $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} \sin(i)$ et $\displaystyle\sum_{n=-5}^{30} \frac{n-2}{n+7}$

On peut montrer par récurrence les propriétés suivantes :

Proposition 3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0\,;n]\!]$, et $a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres. Alors :

① associativité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$, en particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

② linéarité : $\displaystyle\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$.

Proposition 4. Sommes de référence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ② pour $x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ③ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

(5). rigoureusement, le symbole Σ est défini par récurrence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} a_k = a_{p+1} + \sum_{k=0}^{p} a_k$.

Démonstration. ✎ ① (et ③) : par récurrence, ② : calculer $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$. □

EXEMPLE 22. ✎ En utilisant la linéarité de la somme, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2k+1$.

5.3 Factorielle et combinaisons

DÉFINITION 10. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre *factorielle* n est $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Par convention, on pose aussi $0! = 1$.

EXEMPLE 23. Calculer $n!$ pour $n \in [\![0;6]\!]$. Simplifier $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 11. Pour tous entiers naturels n et p, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, (qui s'interprétera comme le nombre de façons de choisir p objets parmi n), de la façon suivante :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1} \text{ si } n \geqslant p \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

On utilise parfois la notation $C_n^p = \binom{n}{p}$.

EXEMPLE 24. ✎ soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}$. Soit $p \in [\![0;n]\!]$, montrer que $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

PROPOSITION 5. TRIANGLE DE PASCAL

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

Démonstration. ✎ Partir du membre de droite et réduire au même dénominateur. □

EXEMPLE 25. ✎ Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$:

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition 5 :

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{p} & + & \binom{n}{p+1} \\ & & \| \\ & & \binom{n+1}{p+1} \end{array}$$

EXEMPLE 26. ✎ Montrer par récurrence qu'il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n.

PROPOSITION 6. BINÔME DE NEWTON

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Démonstration. ✎ Procéder par récurrence sur n. □

EXEMPLE 27. Soit x réel, développer : $(1+x)^4$. Calculer, pour tout entier naturel n, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

Bilan du § 1

Le but de ce chapitre est double : donner de bon réflexes de rédaction des textes mathématiques, et comprendre des concepts liés au calcul avec les entiers : la notion de récurrence (priorité absolue), les sommes, et les coefficients binomiaux.

Les sections 2 (symboles $\in$, $\forall$, $\exists$, méthode pour démontrer une égalité), 3 (symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, méthode pour résoudre une équation), et 2.4 (vocabulaire des ensembles) contiennent peu de choses à apprendre, mais des méthodes à acquérir, qui serviront de référence durant toute l'année.

La section 4.2 et 4.3 introduisent les notions de bijection, surjection, injection d'une part et fonction réciproque d'autre part. Ce sont des concepts difficiles sur lesquels nous reviendront plusieurs fois pendant l'année.

La section 5.1, sur la notion de récurrence, est la plus importante du chapitre. Il faut la travailler avec les exercices qui s'y rapportent.

La section 5.2 sur les symboles Σ et Π sera utilisée toute l'année également. Les résultat de la 4 sont à connaître absolument.

Enfin, les définition et résultats de la section 5.3, qui présentent les coefficient binomiaux et la formule du binôme, constituent la seconde priorité du chapitre.

Objectifs prioritaires

① Savoir formuler un raisonnement par récurrence (section 5.1) .... ☐
   (a) savoir refaire l'exemple 19 .... ☐
   (b) savoir refaire l'exemple 20 .... ☐
   (c) savoir refaire l'exercice 4 .... ☐

② savoir utiliser les factorielles et les coefficients binomiaux (section 5.3) .... ☐
   (a) savoir par cœur la définition 10 de factorielle .... ☐
   (b) savoir refaire l'exemple 23 .... ☐
   (c) savoir par cœur la définition 11 de coefficient binomial .... ☐
   (d) savoir refaire et connaître les résultats de l'exemple 24 .... ☐
   (e) savoir par cœur la proposition 5 .... ☐
   (f) savoir refaire l'exemple 25 .... ☐
   (g) savoir par cœur la proposition 6 .... ☐
   (h) savoir refaire l'exemple 27 .... ☐
   (i) savoir refaire l'exercice 9 .... ☐

③ maîtriser la rédaction de raisonnements élémentaires .... ☐
   (a) savoir rédiger une égalité : méthode 3 .... ☐
   (b) savoir rédiger la résolution d'une équation : méthode 4 .... ☐

④ savoir utiliser les symboles Σ et Π (section 5.2) .... ☐
   (a) savoir par cœur les sommes de référence de la proposition 4 .... ☐
   (b) savoir refaire l'exemple 21 .... ☐
   (c) savoir refaire l'exercice 6 .... ☐
   (d) savoir refaire l'exercice 7 .... ☐
   (e) savoir refaire l'exercice 8 .... ☐

Objectifs secondaires

① utiliser systématiquement les quantificateurs (section 2) .... ☐
   (a) savoir refaire l'exercice 1 .... ☐

② connaître les notions d'injection, surjection et bijection (définition 7) .... ☐
   (a) savoir refaire l'exemple 15 .... ☐

TD §1

Logique

Exercice 1. Vrai – faux, avec quantificateurs

Vrai ou Faux ? Justifier !

① $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y \leqslant x$ ② $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ ③ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant -5$ ④ $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} \neq x$
⑤ $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \ln(e^x)$ ⑥ $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ 3x+5 < 0$ ⑦ $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2-4 = \sqrt{(x^2-4)^2}$ ⑧ $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} = -x$.

Exercice 2. Implications

Écrire l'implication donnée et sa réciproque avec le symbole $\Longrightarrow$.

Dire ensuite, en justifiant, lesquelles de ces deux propositions sont vraies.

① $2x+3>0$ seulement si $x>0$.
② Pour que $x=2$, il faut que $x^2=4$.
③ Toute fonction décroissante $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée.

Exercice 3. Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : ① $1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x+1}$ ② $\dfrac{2x+1}{2+x} = 2$ ③ $2^x = x^2$

Récurrences

Exercice 4. Récurrences

Démontrer par récurrence :

① $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = (n+1)^2$ (où $n \in \mathbb{N}$)
② $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad (e^x)^n = e^{nx}$ (où $x \in \mathbb{C}$ fixé).
③ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.
④ $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ où $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [-1;+\infty[$. (inégalité de Bernoulli)
⑤ pour tout entier naturel n, n^3-n est divisible par 3.
⑥ pour tout entier naturel n, 7^n-1 est divisible par 6.
⑦ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Composées successives

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note : $f^{\langle n\rangle} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composée successive de n fonctions f).

Donner $f^{\langle 2\rangle}$ et $f^{\langle 3\rangle}$. Conjecturer une expression de $f^{\langle n\rangle}$, et prouver la conjecture.

Sommes et produits

Exercice 6. Sommes de référence

Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$ où $n \in \mathbb{N}^*$ ② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k$ où $n \in \mathbb{N}$ ③ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 3^{n+k}$ où $n \in \mathbb{N}$.

④ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)$ où $n \in \mathbb{N}$ ⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{3k+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. ⑥ $\displaystyle\sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6}$.

Exercice 7. Sommes télescopiques

Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8. Produits

Calculer ① $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ où $n \geqslant 2$. ② $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\ln(k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ③ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 9. Sommes binomiales

Simplifier : ① $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{\binom{n}{j}}{3^j}$ où $n \in \mathbb{N}$. ② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ ③ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Défis

Exercice 10. Somme binomiale

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 11. Somme des carrés des coefficients binomiaux (guidé) ⋆⋆

Soit n un entier naturel.

Déterminer de deux façons différentes le coefficient de x^n dans le développement du polynôme $(1+x)^n(1+x)^n$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.