Devoir surveillé n° 4

3 heures, calculatrices et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre. Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. À chaque question, bien noter le résultat intermédiaire démontré, afin de le réinvestir plus tard.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Barème indicatif : Exercice 1 : 39/120 Exercice 2 : 15/120 Exercice 3 : 34/120 Exercice 4 : 32/120

Exercice 1. Fonction Bêta d'Euler

Soient deux réels $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On définit : $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$. (1)

① Valeurs particulière de la fonction Bêta :

(a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $B(n\,,1)$.

(b) Montrer que $B\left(\dfrac{3}{2}\,,\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{8}$ au moyen du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$.

② Relation fonctionnelle des fonctions Bêta

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $B(a+1,b) = \dfrac{a}{b}B(a\,,b+1)$.

(b) Démontrer par un calcul direct que $B(a+1\,,b) + B(a\,,b+1) = B(a\,,b)$.

(c) Au moyen d'un changement de variable, vérifier que $B(a\,,b) = B(b\,,a)$.

(d) Déduire de ce qui précède : $B(a+1\,,b) = \dfrac{a}{a+b}B(a\,,b)$ puis $B(a\,,b+1) = \dfrac{b}{a+b}B(a\,,b)$.

(e) Sans nouveau calcul d'intégral, et à partir des questions précédentes, évaluer $B\left(\dfrac{7}{2}\,,\dfrac{5}{2}\right)$.

③ Applications au calcul de certaines intégrales.

On traitera cette partie sans calcul de primitive, en utilisant les résultats des deux parties précédentes.

(a) Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $B(p,q)$ à l'aide de factoriels.

(b) Soit $\gamma(p\,,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(\theta)\sin^{2q+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Exprimer $\gamma(p,q)$ en fonction de $B(p\,,q)$.

(c) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\theta)\sin^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta$?

Exercice 2. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$

Soient $a < b$ deux réels.

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a\,;b]$, et telle que $\displaystyle\lim_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On souhaite montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et $f'(a) = \ell$.

① Citer le théorème des accroissements finis.

② Montrer que pour tout $h \in]0\,;b-a]$, il existe $c_h \in]a\,;a+h[$ tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(c_h)$.

③ En déduire que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$. Conclure.

④ Soit $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\ln(x)$. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que le prolongement obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(1). On rappelle que pour $a > 0$, la fonction $t \mapsto t^a$ a une limite nulle en 0, ce qui permet de la prolonger par continuité en 0 et justifie l'existence de B.

Exercice 3. Exponentielle d'une matrice nilpotente d'indice 3

Soit p un entier naturel non nul.

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 3 si et seulement si $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$.

Dans la suite, A est une matrice nilpotente d'indice 3.

Partie A

On définit pour tout réel t la matrice $E(t) = \mathrm{Id} + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

① Démontrer que pour tout réel t et tout réel s, $E(t)E(s) = E(t+s)$.

② En déduire que, pour tout réel t, la matrice $E(t)$ est inversible et préciser son inverse.

③ Soit t un réel. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$.

④ Dans le cas où $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que A est nilpotente d'indice 3 et calculer $E(t)$.

⑤ En déduire : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie B

Soit a un réel. On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, que l'on munit de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Soient les applications $\mathcal{D} : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X],\ P(X) \mapsto P'(X)$ et $\mathcal{T}_a : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X],\ P(X) \mapsto P(X+a)$.

① Vérifier que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On admet que $\mathcal{T}_a$ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

② Soit A la matrice de $\mathcal{D}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Déterminer la matrice A.

③ Vérifier que la matrice de $\mathcal{T}_a$ dans la base $\mathcal{B}$ est $E(a)$.

④ En déduire que $\mathcal{T}_a$ est un automorphisme. Quel est son automorphisme réciproque ?

Exercice 4. Symétries du plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'un endomorphisme $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$ est la symétrie par rapport à l'axe dirigé par le vecteur u, parallèlement à la droite dirigée par le vecteur v, si et seulement si la matrice de $\mathcal{S}$ dans la base (u, v) est J.

① Soit $\mathcal{S}_1$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est J. De quelle symétrie s'agit-il ?

② Étude d'une matrice de symétrie.
Soit $\mathcal{S}_2$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice M définie au début du problème. L'endomorphisme $\mathcal{S}_2$ est donc défini par : $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}_2(X) = MX$.

(a) Calculer M^2. Quelle est l'inverse de M ?

(b) Déterminer un vecteur générateur u de $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{Id})$ et un vecteur générateur v de $\mathrm{Ker}(M + \mathrm{Id})$.

(c) Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{S}_2$ dans la base (u, v). Interpréter géométriquement ce résultat.

③ Construction d'une matrice de symétrie.

(a) Soient $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathcal{B}' = (a, b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Donner P et calculer son inverse P^{-1}.

(c) Soit la symétrie $\mathcal{S}_3$, par rapport à l'axe dirigé par a, et parallèlement à la droite dirigée par b.
Quelle est la matrice de $\mathcal{S}_3$ dans la base $\mathcal{B}'$?

(d) Soit A la matrice de $\mathcal{S}_3$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Donner une relation entre A, J et P. Calculer A.