Devoir surveillé n° 3

3 heures, calculatrices et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre. Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. À chaque question, bien noter le résultat intermédiaire démontré, afin de le réinvestir plus tard.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1. Transformée de Fourier discrète

Une matrice C de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ est dite circulante si et seulement s'il existe des complexes a, b, c et d tels que :
$C = \begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$. Soient aussi les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Étant donnée une matrice circulante C, sa transformée de Fourier discrète est la matrice notée $\mathcal{F}(C)$ définie par $\mathcal{F}(C) = \overline{F}CF$ où $\overline{F}$ est la matrice dont tous les coefficients sont les conjugués des coefficients de F.

Étant donnée une matrice D, on note $\mathcal{I}(D) = F\,D\,\overline{F}$

Partie A

① Calculer P^2, P^3 et vérifier que $P^4 = \mathrm{Id}$. En déduire que P est inversible, et donner son inverse.

② Soit C est une matrice circulante. Montrer que $C = aP^0 + bP^1 + cP^2 + dP^3$ où a, b, c, d sont des complexes.

③ On étudie un cas particulier de matrice circulante : soit $M = P^0 - P^2$. Donner les coefficients de M. Déterminer des équations cartésiennes de son image et un système de générateurs de son noyau.

Partie B

① Vérifier que $\mathcal{F}(P)$ est une matrice diagonale, que l'on précisera.

② Démontrer que $F^{-1} = \overline{F}$.

③ Sans effectuer de produit matriciel, mais en utilisant les propriétés des produits de matrices, vérifier que pour tous λ et μ complexes, tout entier naturel non nul et toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$:

(a) $\mathcal{F}(\lambda A + \mu B) = \lambda\mathcal{F}(A) + \mu\mathcal{F}(B)$.

(b) $\mathcal{F}(AB) = \mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)$.

(c) $\mathcal{F}(A^{-1}) = \mathcal{F}(A)^{-1}$ lorsque A est inversible.

(d) $\mathcal{F}(A^n) = \mathcal{F}(A)^n$. (on pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$)

(e) $\mathcal{I}(\mathcal{F}(A)) = A$.

④ Déduire des questions précédentes $\mathcal{F}(P^0)$, $\mathcal{F}(P^2)$ et $\mathcal{F}(P^3)$.
En conclure que l'image par $\mathcal{F}$ d'une matrice circulante est une matrice diagonale.

Partie C

① En utilisant les propriétés de $\mathcal{F}$ énoncées dans la partie B, et la matrice M de la partie A :

(a) Calculer $\mathcal{F}(M)$, et en déduire $\mathcal{F}(M)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer $\mathcal{I}(\mathcal{F}(M)^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Quelle matrice a-t-on en fait calculée dans la question précédente ?

② Soit $N = P^0 + P^2 + P^3$. À partir du calcul de $\mathcal{F}(N)$, déterminer N^{-1}.

Remarque culturelle : La transformée de Fourier discrète et les matrices circulantes peuvent également se définir dans le cas de matrice $n \times n$, avec des propriétés semblables, basées sur les racines n-ièmes de l'unité. Elles sont utilisées pour étudier des phénomènes vibratoires, ou pour le traitement d'images.

Exercice 2. Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2^n}$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.
② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
③ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-2}}$, puis que (u_n) converge vers 0.
④ Montrer que $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2^n}$. En déduire un équivalent de u_n.
⑤ Donner un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
La suite (u_n) est-elle décroissante ?

Exercice 3. Divergence de la série harmonique

L'objectif est d'étudier le comportement de la suite h définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On souhaite montrer que $h_n \sim \ln(n)$, et, plus précisément, que $h_n - \ln(n)$ converge vers une limite notée γ.

Les mathématiciens ignorent encore si γ, que l'on appelle la constante d'Euler, est un nombre irrationnel.

On considère les suites u et v définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n+1)$ et $v_n = h_n - \ln(n)$.

① Soit la fonction $f :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x - \ln(1+x)$.
Dresser, en le justifiant, le tableau de variation complet de f. En déduire l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
② Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ et $v_{n+1} - v_n = -f\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)$.
③ Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?
④ En déduire $h_n \sim \ln(n)$. Que dire de la convergence de h ?

Exercice 4. Construction d'un quadrifolium écrit ATS 2010

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $M(t) = (x(t)\,;y(t))$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t)\sin^2(t) \\ y(t) & = & \sin(t)\cos^2(t) \end{array}\right.$$

① Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ pour étudier toute la courbe.
② (a) Comparer $M(-t)$ avec $M(t)$ et montrer que $\mathcal{C}$ admet une symétrie d'axe à préciser.
(b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que $\mathcal{C}$ admet une symétrie d'axe à préciser.
(c) Comparer $M(\frac{\pi}{2} - t)$ avec $M(t)$ et montrer que $\mathcal{C}$ admet une symétrie d'axe à préciser.
③ Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe $\mathcal{C}$ à partir du tracé obtenu pour $t \in I$.
④ Calculer les dérivées de x et y et montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & \sin(t)(3\cos^2(t) - 1) \\ y'(t) & = & \cos(t)(1 - 3\sin^2(t)) \end{array}\right.$$

Étudier les variations des fonctions x et y et dresser leur tableau de variation conjoint sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. On notera t_0 le réel de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
⑤ Préciser les coordonnées de $M(0)$, $M(t_0)$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que les vecteurs tangents en ces points. (1)
⑥ Tracer en gras la partie de la courbe $\mathcal{C}$ pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques que l'on précisera.
⑦ Montrer que si (ρ, θ) sont les coordonnées polaires d'un point de la courbe $\mathcal{C}$, on a $4\rho^2 = \sin^2(2\theta)$.
⑧ En déduire que la courbe C est inscrite dans un disque de centre O et d'un rayon à préciser.

(1). On donne $x(t_0) \approx 0{,}27$, $y(t_0) \approx 0{,}38$ et $\sqrt{2}/4 \approx 0{,}35$.