Devoir surveillé n° 2

3 heures, calculatrices et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre. Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. À chaque question, bien noter le résultat intermédiaire démontré, afin de le réinvestir plus tard.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Exercice 1. Un équation différentielle

Partie A

Soit l'équation différentielle $(\star)$: $xz' - z + \mathrm{e}^x z^2 = 0$ de fonction inconnue z et de variable x.

① S'agit-il d'une équation différentielle linéaire ? Donner une solution simple de $(\star)$ sur $]0\,;+\infty[$.

② En déduire que si z est une solution maximale de l'équation $(\star)$, définie sur un intervalle $I \subset]0\,;+\infty[$ et différente de la fonction nulle, alors $\forall x \in I,\ z(x) \neq 0$.

③ Soit $y = 1/z$. Démontrer que y est solution de $xy' + y = \mathrm{e}^x$ si et seulement si z est solution de $(\star)$.

Partie B

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $xy' + y = \mathrm{e}^x$.

① Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) : $xy' + y = 0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

② Trouver une solution particulière de (E) sur $]0\,;+\infty[$ puis exprimer la forme générale des solutions de (E) sur cet intervalle en fonction d'une constante C_1.

③ En déduire les solutions maximales z sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $(\star)$.

④ Sans les justifier, donner les solution de l'équation différentielle (E) sur $]-\infty\,;0[$ en fonction d'une constante C_2.

Partie C

On considère les fonction f et g : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$

① Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \mathrm{e}^x f(-x)$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

② Dresser le tableau de signe de $g'(x)$. (on pourra étudier avant g'').
En déduire le tableau de variations, puis le tableau de signes de g.

③ En remarquant que $\forall x < 0,\ g(x) < 0 < g'(x)$, prouver que $\forall x < 0,\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$.

④ En déduire la limite en 0^- de f, puis que poser $f(0) = 1$ permet de prolonger f en une fonction continue en 0.

⑤ Soit y une solution de (E) sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que si $y \neq f$, alors $\lim\limits_{x\to 0} |y(t)| = +\infty$.

⑥ En admettant un résultat semblable pour une solution de (E) sur $]-\infty\,;0[$, démontrer que (E) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. Préciser cette solution.

⑦ L'équation $(\star)$ n'admet–elle qu'une seule solution sur $\mathbb{R}^*$ prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Étude d'une Bretzel

selon Écrit ATS 2006

On considère les fonctions x et y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$x(t) = \sin^2 t \text{ et } y(t) = (1 + \cos t) \sin t$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On se propose d'étudier et de représenter la courbe Γ paramétrée par :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P},\ t \mapsto M(t) = (\sin^2 t\,;(1+\cos t)\sin t) = (x(t)\,;y(t))$$

Pour tout réel t, $M(t)$ désigne le point du plan de coordonnées $(x(t)\,;y(t))$

On appelle $\Gamma_0 = \{M(t) : 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$ la partie de la courbe de obtenue en prenant t dans $[0\,;\pi]$.

① Étudier la périodicité et la parité des fonctions x et y.
Démontrer que l'on peut obtenir Γ à partir de Γ_0 par une transformation que l'on précisera.

② Donner, en justifiant les signes, le tableau de variations conjointes de x et y sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

③ Pour quelles valeurs du paramètre t le point $M(t)$ est-il stationnaire ?
Montrer que pour tout $t \in]0\,;\pi[$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\sin(t)}{1-\cos(t)}$.
Calculer $\lim\limits_{t\to\pi} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

④ Représenter soigneusement Γ_0 et le reste de Γ en deux couleurs différentes.

⑤ Pour tout réel t, on note simplement $M = M(t)$ et $N = M(\pi + t)$.
Vérifier que pour tout réel t, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux.

⑥ Déterminer, pour tout réel t, les coordonnées $(X(t)\,;Y(t))$ du milieu de $[MN]$.

⑦ Simplifier l'expression $\left(X(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2$.
En déduire une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{C}$ des milieux de $[MN]$.
Préciser la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

⑧ Ajouter à la figure les points M, N, les droites (OM), (ON) pour $t = \frac{\pi}{3}$, puis $\mathcal{C}$.

Exercice 3. Propriétés d'un tétraèdre orthocentrique

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

On considère les points $A(3\,;-5\,;0)$, $B(3\,;3\,;0)$, $C(-2\,;0\,;0)$ et $D(0\,;0\,;3)$.

Le but du problème est d'étudier les propriétés du tétraèdre $(ABCD)$.

① Faire une figure.

② (a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis leur produit scalaire et interpréter.
(b) Montrer également que les paires d'arêtes opposées du tétraèdre sont deux à deux orthogonales.

③ Étude du projeté orthogonal de S sur (ABC).
(a) Les points A, B et C sont–ils alignés ? En déduire qu'ils définissent le plan d'équation $z = 0$.
Sans justifier, identifier la droite $\mathcal{H}_D$ perpendiculaire au plan (ABC) qui passe par D.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{H}_D$ coupe le plan (ABC) en l'orthocentre du triangle ABC.

④ Orthocentre d'un tétraèdre.
(a) Déterminer une équation cartésienne (simple) du plan (BAD).
Déterminer ensuite un système d'équations paramétriques (simples) de la droite $\mathcal{H}_C$, passant par C et perpendiculaire au plan (BAD).
On dit que $\mathcal{H}_C$ est la hauteur de $ABCD$ issue de C.
(b) Vérifier que les droites $\mathcal{H}_C$ et $\mathcal{H}_D$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point H d'intersection. Le point H est appelé orthocentre du tétraèdre $ABCD$. On admet qu'il appartient aux hauteurs $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$.

⑤ Sphère circonscrite et droite d'Euler
(a) Soit G le centre de gravité (isobarycentre) du tétraèdre $ABCD$. Déterminer ses coordonnées.
(b) Former l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2\,;-1\,;3/2)$ et de rayon $\sqrt{19{,}25}$.
(c) Vérifier que $\mathcal{S}$ est la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
(d) Montrer que H, Ω et G sont alignés. Ils forment une droite qui généralise la droite d'Euler d'un triangle.