Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

3 heures, calculatrices et documents interdits.

Les problèmes pourront être traités dans n'importe quel ordre. Les questions peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre les résultats des questions précédentes.

Veiller à lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème, et soigneusement les données initiales, avant de le traiter. À chaque question, bien noter le résultat intermédiaire démontré, afin de le réinvestir plus tard.

La clarté et la précision de la rédaction seront pris en compte dans l'évaluation. On proposera une conclusion à chaque réponse, et on encadrera les résultats.

Barème indicatif : (peu changer)

- ⋆ exercice 1 : 30/100
- ⋆ exercice 2 : 18/100
- ⋆ exercice 3 : 24/100
- ⋆ exercice 4 : 28/100

Exercice 1. Spirale des projetés successifs sur les diagonales d'un octogone
Ce problème étudie la longueur d'une spirale infinie, construite à partir des projetés orthogonaux successifs d'un point sur les diagonales d'un octogone régulier.

Le plan complexe est rapporté au repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 5 centimètres.

① Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note B le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On étudie la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $p_\theta(z) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\bar{z} + z)$.

(a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\bar{z} + z}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est réel.
Que peut–on en déduire pour les points O, B et M' ? Justifier.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\bar{z} - z}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est imaginaire pur.
Que peut–on en déduire pour les droites (OB) et (MM') ? Justifier.

(c) Que représente le point M' pour le point M et la droite (OB) ?
Construire à la règle et au compas, sans calcul, le point M' dans le cas où $z = 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

② Résoudre l'équation $z^8 = 1$, en détaillant les étapes de calcul.
Représenter sur la figure le polygone dont les sommets ont pour affixes les solutions de cette équation.

③ Pour tout entier naturel n, on note B_n le point d'affixe $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{4}}$. Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = 1$ et A_{n+1} le projeté orthogonal de A_n sur la droite (OB_{n+1}). On note enfin z_n l'affixe du point A_n.

(a) Sur la figure, représenter $A_1, \ldots, A_8$.

(b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{2n\mathrm{i}\pi}{4}}\bar{z}_n + z_n)$.

(c) Donner la forme exponentielle de $\dfrac{\mathrm{i}+1}{2}$. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $z_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{4}}}{\sqrt{2}^n}$.

④ On veut évaluer la longueur ℓ de la spirale infinie $A_0A_1\ldots$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\ell_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_kA_{k+1}$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1\ldots A_n$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_nA_{n+1} = \left|\dfrac{\mathrm{i}-1}{2}z_n\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}$.

(b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}}{\sqrt{2}-1}$, puis la valeur $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ell_n$.

Exercice 2. Nombre de solutions d'une équation et résolution par parachutage
On cherche à résoudre l'équation (E) : $x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On considère la fonction auxiliaire $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.

① Dresser le tableau de variations de f. Justifier soigneusement les variations et les limites en 0 et $+\infty$.

② En déduire le nombre de solutions de l'équation (E). (citer les hypothèses du théorème invoqué.)

③ Résoudre l'équation (E). (deviner et vérifier ces solutions, puis justifier que l'équation est résolue).

Exercice 3. Formule de John Machin
Ce problème a pour but de démontrer la formule qui a permis au mathématicien écossais John Machin de calculer, en 1 706 (à la main) les cent premières décimales de π.

① Développer les nombres complexes $(5+\mathrm{i})^4$ et $(2+2\mathrm{i})(239+\mathrm{i})$. En déduire : $(5+\mathrm{i})^4 = (2+2\mathrm{i})(239+\mathrm{i})$.

② Déterminer la forme exponentielle, puis un argument du nombre complexe $2+2\mathrm{i}$.

③ Soit z un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, et de forme exponentielle : $re^{\mathrm{i}\theta}$. Vérifier que $\tan(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$.

En déduire que pour tout réel $a \neq 0$: $\arg(a+\mathrm{i}) = \arctan \dfrac{1}{a}\ [\pi]$.

④ Déduire des trois questions précédentes : $4\arctan \dfrac{1}{5} = \dfrac{\pi}{4} + \arctan \dfrac{1}{239}\ [\pi]$.

Expliquer pourquoi $0 < 4\arctan \dfrac{1}{5} < \pi$ et $0 < \dfrac{\pi}{4} + \arctan \dfrac{1}{239} < \pi$.

Démontrer enfin que : $4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$. (sans modulo π !)

Exercice 4. Deux fonctions égales sur un intervalle.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité 2 centimètres. Tous les tracés seront réalisés sur une même figure.

① Étude de $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 2\arctan(x)$ et de sa courbe $\mathcal{C}_h$.

(a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x. Donner l'équation de la tangente T à la courbe de $\mathcal{C}_h$ au point O.

(b) Sans justifier, donner la parité et le tableau de variations complet de h.

(c) Représenter la tangente T, les asymptotes de $\mathcal{C}_h$ et la courbe $\mathcal{C}_h$.

② Étude et représentation de $f : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ et de sa courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Dresser le tableau de variations complet (avec les limites) de $v : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

(b) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f est paire.

(c) Calculer $h(1/\sqrt{3})$ et $f(1/\sqrt{3})$.
Démontrer que $\forall x > 0,\ h(x) = f(x)$. (on pourra prouver que $h - f$ est constante sur $]0\,;+\infty[$).

(d) À l'aide des question précédentes, représenter la fonction f.

③ Soit $x = \tan(\frac{\theta}{2})$, où $\theta \in \left]-pi\,;\pi\right[$. Exprimer $f(x)$ et $h(x)$ en fonction de θ.

Retrouver alors : $\cos(\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$.

④ Soit $x = \mathrm{e}^{-t}$ où $t \in \mathbb{R}$. Montrer de même que $\arccos(\mathrm{th}(t)) = 2\arctan(\mathrm{e}^{-t})$.