§ 9 : Matrices

1. Opérations sur les matrices

1.1 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Notation 1. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

On rappelle que si E est un ensemble, $E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(x_1, \ldots, x_n) \text{ tels que } \forall i = 1, \ldots, n : x_i \in E\}$.

Notation 2. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont notés sous la forme de vecteurs colonnes : $(x_i)_{i=1\ldots n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 1. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni d'une opération d'addition et d'une multiplication extérieure par un nombre (scalaire) de $\mathbb{K}$ ainsi :

$\forall u = (u_i)_{i=1..n} \in \mathbb{K}^n,\ \forall v = (v_i)_{i=1\ldots n} \in \mathbb{K}^n,\ u + v = (u_i + v_i)_{i=1\ldots n}$ et $\lambda u = (\lambda u_i)_{i=1\ldots n}$

Ces opérations généralisent les opérations analogues des vecteurs du plans ($\mathbb{R}^2$) ou de l'espace ($\mathbb{R}^3$).

On dira plus tard qu'elles confèrent à $\mathbb{K}^n$ une structure de $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1.2 Notion de matrice

Définition 1. Une matrice A de n lignes et p colonnes est un élément de $(\mathbb{K}^n)^p$, elle est donc définie par np éléments de $\mathbb{K}$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Le nombre a_{ij} est le *coefficient* d'indice (i,j) de la matrice A.

La matrice A est parfois dite de *taille* ou de *format* (n,p) ou tout simplement *matrice* $n \times p$.

L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Lorsque $p = 1$, les matrices s'identifient aux vecteurs colonnes : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$.

Notation 3. On présente généralement la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{array}$$

On notera $A_{i*} = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant p} \in \mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ la matrice constituée de i-ème ligne de la matrice A.

De même $A_{*j} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est la matrice constituée de la j-ème colonne de la matrice A.

Exemple 1. À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ② $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & \mathrm{e} \\ \pi & \sqrt{2} & 0{,}2 \end{pmatrix}$ ③ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ④ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ⑤ $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⑥ $F = (3)$

Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i - j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$.

Définition 2. On adopte le vocabulaire suivant :

⋆ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des *matrices carrées* de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

* $\star$ $\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des *matrices lignes* de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
* $\star$ $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ est l'ensemble des *matrices colonnes*, ou *vecteurs*, de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
* $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice triangulaire supérieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.
* $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice triangulaire inférieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.
* $\star$ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice diagonale* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
  On note alors $(a_{ij}) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.
* $\star$ $0_{np} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice nulle*, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
* $\star$ $\mathrm{Id}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la *matrice identité* : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1.
* $\star$ $\mathrm{E}_{ij} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice élémentaire* dont le coefficient (i,j), qui vaut 1, est le seul non nul.

DÉFINITION 3. L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est muni d'une somme et d'un produit extérieur :
$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 2. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer $E + D$, $A - 3\mathrm{Id}_3$ et $\mathrm{i}\,\mathrm{E}_{1,2} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

1.3 Multiplication d'une matrice et d'un vecteur

DÉFINITION 4. Le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (p colonnes) avec un vecteur de $X = (x_j) \in \mathbb{K}^p$ est un vecteur $Y = (y_i) \in \mathbb{K}^n$, combinaison linéaire suivante des colonnes de A :

$$Y = AX = x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \ldots x_n A_{*n} \text{ soit } \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

EXEMPLE 3. À partir des matrices de l'exemple 1, calculer AC, $\mathrm{Id}_3 C$. Résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Expliquer sans poser le calcul pourquoi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1}$. Deviner une solution de $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{2,1}$.

Cette définition est motivée par les remarques suivantes :

REMARQUE 2 (Systèmes linéaires). Tout système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$, de n équations et à p inconnues, équivaut à une équation matricielle de la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice formée des coefficients du système, $X \in \mathbb{K}^p$ est le vecteurs colonne dont les composantes sont les inconnues du système et $B \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur formé des seconds membres des équations.

EXEMPLE 4. Vérifier : $AX = B \iff \left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 3 \end{aligned} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 3 (Applications définies par un produit matriciel). Des applications $\mathcal{L} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$, que nous qualifierons de linéaires, peuvent s'écrire sous la forme $\mathcal{L}(X) = AX$. Parmi elles, les rotations vectorielles, les symétries vectorielles, les homothéties vectorielles,. . . .

Réciproquement, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, l'application $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p,\ X \mapsto AX$ est l'*application linéaire canoniquement associée à* A.

EXEMPLE 5. ✎ Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice A que l'on précisera telle que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ \mathcal{L}(X) = AX$.

Répondre à la même question pour $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Interprétation géométrique ?

1.4 Multiplication matricielle

Définition 5. On définit le produit d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice C de n lignes et q colonnes telle que $\forall j \in [\![1\,;q]\!],\ C_{*j} = AB_{*j}$. Ainsi :

$$\forall A = (a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}).$$

⚠ On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

Remarque 4. En particulier le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est un nombre, égal à $\ell_1c_1 + \cdots + \ell_nc_n$.

Le coefficient (i,j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B.

On peut disposer les calculs ainsi :

$$0\times 2 + 3\times 1 + 1\times 2$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\3&1\\0&2\end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\1&1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2\\9&5\\4&9\end{pmatrix} = AB\end{array}$$

Exemple 6. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer les produits :

① ED ② DE ③ $A\mathrm{Id}_3$ ④ $0_{2,3}A$ ⑤ EB ⑥ Que dire de BE ?

Proposition 1 (Propriétés intuitives du produit). Le produit matriciel ...

① est associatif : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC)$.

② est distributif à gauche par rapport à $+$: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+C) = AB + AC$.

③ est distributif à droite par rapport à $+$: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC$.

④ commute avec le produit externe : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Démonstration. Se vérifie à l'aide de la définition. □

Proposition 2. Propriétés pratiques du produit matriciel

Le produit matriciel ...

① vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A\mathrm{Id}_p = A$ et $\mathrm{Id}_nA = A$.

② Vérifie $\forall (a_i) \in \mathbb{R}^p$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_p)]^n = \mathrm{diag}(a_1^n, \dots, a_p^n)$.

③ Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$, alors $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k}$ avec $A^0 = B^0 = \mathrm{Id}_n$.

④ n'est pas commutatif.

⑤ ne vérifie pas la propriété du produit nul.

Démonstration. Utiliser la définition du produit. Les produits DE et ED de l'exemple 6 justifient ④ et ⑤. □

Exemple 7. Soit $M = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. Vérifier que $M = \mathrm{Id} + T$ en précisant la matrice T. En déduire M^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Matrice inversible

Définition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *matrice inverse* de A et on note $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui vérifie

$$AA^{-1} = \mathrm{Id}_n = A^{-1}A$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui admettent une inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3. Inverse d'une matrice

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

① A^{-1} est unique : si $BA = \mathrm{Id}_n$ ou $AB = \mathrm{Id}_n$ alors $B = A^{-1}$.

② $(A^{-1})^{-1} = A$

③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

④ si deux matrices non nulles C et D vérifient $CD = 0_{n,n}$, alors aucune n'est inversible.

Démonstration. Le faite qu'il suffise de prouver une seule des égalités $AB = \mathrm{Id}$ ou $BA = \mathrm{Id}$ sera prouvé ultérieurement. Les autres points sont de simples vérification de la définition 6. □

Exemple 8. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M^2 - 3M + 2\mathrm{Id}_2 = 0_{2,2}$. En déduire M^{-1}.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Montrer que $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1.6 Matrices d'opérations élémentaires

Définition 7. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de lignes $\{L_1, \ldots, L_n\}$. On appelle opérations élémentaires sur les lignes de M les opérations suivantes (où $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$) :

- ⋆ La permutation de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.
- ⋆ La multiplication par $\alpha \in \mathbb{K}^*$ de la ligne j : $\alpha L_i \to L_i$
- ⋆ La substitution de L_i par la combinaison $L_i + \alpha L_j$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$: $L_i + \alpha L_j \to L_i$

Définition 8. Pour tous $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on considère, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices dites d'opérations élémentaires :

① $p_{ij} = \mathrm{Id}_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ (matrices de permutation)

② $d_i(\alpha) = \mathrm{Id}_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ (matrices de dilatation, $\alpha \in \mathbb{K}$)

③ $t_{ij}(\alpha) = \mathrm{Id}_n + \alpha E_{ij}$ (matrices de transvection, $\alpha \in \mathbb{K}$)

Proposition 4. On vérifie que les opérations élémentaires sur les lignes de la définition 7 s'obtiennent par la multiplication à gauche de la matrice d'opération élémentaire correspondante de la définition 8.

Démonstration. ✎ Le vérifier lorsque $n = 3$. □

Exemple 9. ✎ Montrer que les matrices de la définition 8 sont inversibles et déterminer leurs inverses.

2. Systèmes linéaires

2.1 Matrice d'un système

Définition 9. On appelle *système linéaire* (S) de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients et $(b_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}^n$, le *second membre*. La i-ème ligne est l'équation i, et les $x_1, \ldots, x_p$ sont les p *inconnues*.

> Résoudre le système (S), c'est trouver l'ensemble des $(x_j)_{j=1,\dots,p}$ qui vérifient le système (S).
>
> Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont les mêmes solutions.

Remarque 5. Le système (S) de la définition 9 équivaut à l'équation matricielle $AX = B$ où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la *matrice du système* (S), $X = (x_i) \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur inconnu et $B = (b_j) \in \mathbb{K}^p$ le second membre.

Le tableau $A|B$ est la matrice augmentée du système (S).

Proposition 5.

Soit M une matrice inversible. Alors les systèmes de matrices augmentées $A|B$ et $MA|MB$ sont équivalents. En particulier, appliquer des opérations élémentaires de la section 1.6 aux lignes d'un système le transforme en un système équivalent.

Démonstration. Si $AX = B$ alors $MAX = MB$. Réciproquement, si $MAX = MB$, en multipliant par M^{-1} à gauche, $AX = B$. □

2.2 Méthode du pivot

On peut résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients. Une manière commode de présenter les choses est la suivante :

Méthode 1. Algorithme du pivot de Gauss total

Pour résoudre le système (S) :

① on écrit la matrice augmentée du système

② on choisit parmi les coefficients non nuls un pivot $a_{i,j}$, que l'on entoure, dans une ligne et une colonnes qui ne contiennent pas d'autre pivot. Si c'est impossible on passe à l'étape ⑤

③ on réécrit le tableau en remplaçant chaque ligne L_k $(k \neq i)$ par $L_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} L_i$.

④ on reproduit l'étape ②

⑤ On conclut en fonction de la situation :

(a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, sauf son second membre : le système n'a pas de solution.

(b) sinon, toutes les inconnues dans les colonnes sans pivot sont des paramètres, et peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{K}$. On écrit le système correspondant au tableau final avec les inconnues, et on exprime les solutions en isolant les inconnues des colonnes à pivot.

On peut à chaque étape, si cela simplifie le calcul, choisir de permuter deux lignes, ou de multiplier une ligne par une constante non nulle.

Exemple 10. $(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right.$. On applique la méthode du pivot :

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{L_1 - L_2 \to L_1} \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{L_1 - L_3 \to L_1, L_2 + \frac{1}{2} L_3 \to L_2} \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & \boxed{2} & 0 & 2 \end{array}$$

L'algorithme s'arrête (plus de pivot), on est dans la situation où le système admet des solutions (second membre nul en face des lignes de 0). La variable x est un paramètre (elle peut prendre n'importe quelle valeur réelle t). L'ensemble (infini) des solutions est formé des (x, y, z) tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ \frac{5}{2}x + z & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} x & = & & t \\ y & = & 1 & -\frac{3}{2}t \\ z & = & 1 & -\frac{5}{2}t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ce résultat s'interprète ainsi : l'intersection des trois plans dont les équations sont les lignes du système est la droite passant par $A(0\,;1\,;1)$ et dirigée par $\vec{u}(1\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{5}{2})$.

Remarque 6. La méthode consistant à remplacer le système par un système équivalent (obtenu par combinaisons de lignes), l'ensemble des solutions obtenu est le même quelque soit le choix des pivots.

Remarque 7. Une méthode alternative, (algorithme partiel du pivot de Gauss), consiste à n'effectuer l'étape ③ que pour les lignes sans pivot. On obtient dans l'étape ⑤b un système triangulaire que l'on résout par substitution.

Exemple 11. Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot. Les trois premiers sont d'inconnues (x, y, z), le quatrième d'inconnues (x, y) et le dernier d'inconnue t. Interpréter géométriquement les résultats.

① $x + y - z = 1$ ② $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x-2y &= 1 \\ 3x+z &= 2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=2 \\ z-x=3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x-y &=1 \\ x+2y &=1 \\ x+8y &=1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \end{cases}$

2.3 Aspects théoriques de la méthode du pivot

Remarque 8. Si on obtient r pivots en résolvant un système de n équations à p inconnues, nécessairement $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$: il n'y a qu'un pivot par ligne et colonnes.

Remarque 9. Si un système de n équations à p inconnues admet une unique solution, nécessairement le nombre r de pivots obtenus par la méthode de Gauss est égal à p. (sinon $r < p$ et on a des paramètres que l'on peut choisir arbitrairement, donc une infinité de solution).

Remarque 10. Soit (S) un système linéaire admettant des solutions, d'inconnues $x_1, \ldots, x_p$. Si, après la méthode du pivot, on obtient m paramètres $x_1, \ldots, x_m$ $(m \leqslant p)$, une solution du système $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est déterminée par un unique jeu de paramètre $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. Réciproquement, les $(x_1, \ldots, x_p)$ étant exprimées en fonction des paramètres, un choix de paramètre détermine une unique solution.

Proposition 6. Rang d'un système linéaire

Le nombre de pivots obtenus dans la résolution d'un système par la méthode de Gauss ne dépend pas du choix des pivots. Ce nombre est appelé le *rang du système.*

Démonstration. La résolution par la méthode du pivot donne k pivots avec un premier choix de pivots et $\ell \leqslant k$ avec un second choix. On considère la solution obtenue en fixant les $p - k$ paramètres de la première méthode à 0.

Le système obtenu en exprimant ces $p - k$ paramètres nuls en fonction de ceux de la seconde méthode est un système de $p - k$ équations à $p - \ell$ inconnues qui admet une unique solution (remarque 10), qui donc se résout en $p - \ell$ pivots (remarque 9). Mais alors $p - \ell \leqslant p - k$ (remarque 8) donc $\ell \geqslant k$ d'où $\ell = k$: les deux méthodes produisent autant de pivots. □

2.4 Application à l'inversion d'une matrice

On recherche l'inverse d'une matrice A en appliquant la méthode du pivot à la matrice augmentée $A|\mathrm{Id}_n$:

Méthode 2. Inverser une matrice

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. En notant I_j la j-ème colonne de Id_n et C_j la j-ème colonne de A, $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$ équivaut à $AC_j = I_j$ pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. On obtient ainsi A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss, en résolvant le système précédent avec comme second membre Id_n. Si à l'issue du pivot on a obtenu la matrice identité à gauche, la matrice de droite est A^{-1}. Cette méthode sera davantage justifiée dans la section 1.6.

Exemple 12. On souhaite inverser : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1 - 2L_3 \to L_1} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 + L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}L_2 \to L_2]{-L_1 \to L_1} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right. \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 13. ✎ Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5 Rang d'une matrice

Proposition 7. Rang d'une matrice

Le *rang d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang du système $AX = 0_p$. On a :

① $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ si et seulement si les colonnes de A sont coplanaires.

② $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ si et seulement si les colonnes de A sont colinéaires.

③ $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

④ $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si $X \mapsto AX$ est surjective.

⑤ $\mathrm{rg}(A) = p$ si et seulement si $X \mapsto AX$ est injective.

⑥ $\mathrm{rg}(A) = n = p$ si et seulement si A est inversible (et $X \mapsto AX$ est bijective).

Exemple 14. ✎ Donner des exemples de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de rang 0, de rang 1, de rang 2 puis de rang 3.

3. Image et noyau d'une matrice

3.1 Image d'une matrice

Définition 10. Soient $U_1, \dots, U_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Une *combinaison linéaire* de ces vecteurs est un vecteur V de $\mathbb{K}^n$, de la forme $V = x_1U_1 + \cdots + x_pU_p$ où les x_i sont dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est appelé l'*sous-espace vectoriel engendré* par les vecteurs $U_1, \dots, U_p$. On le note : $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \{Y = x_1U_1 + \cdots + x_pU_p \ : \ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p\}$.

Ainsi, $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \{Y = AX \ : \ X \in \mathbb{K}^p\}$ où A est la matrice dont les colonnes sont les $U_1, \dots, U_p$.

Définition 11. L'image de la matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des vecteurs $Y = AX$ où $X \in \mathbb{R}^p$.

C'est donc aussi l'espace vectoriel engendré par les colonnes $A_{*1}, \dots, A_{*p}$ de cette matrice.

On note cet ensemble $\mathrm{Im}(A) = \{Y = AX \ : \ X \in \mathbb{K}^p\}$.

Méthode 3.

Pour obtenir une description de $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$ avec des équations : on fixe un vecteur *général* $Y \in \mathbb{K}^n$ et on résout le système avec la méthode du pivot.
Les second membres des lignes de zéro donneront un système d'équations représentant une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de Y pour que $Y \in \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_n)$.

Exemple 15. Décrire par des équations $\mathrm{Im}(H)$ où $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 12. La *dimension* de l'espace $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$ engendré par les vecteurs $U_1, \dots, U_p$ de $\mathbb{K}^n$ est le rang de la matrice dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_p$.

Remarque 11. Dans la méthode précédente, la dimension d est le nombre de pivots obtenus. Si on sélectionne $U_{i_1}, \dots, U_{i_d}$ les vecteurs dont les colonnes contiennent des pivots : $\mathrm{Vect}(U_{i_1}, \dots, U_{i_d}) = \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$.

3.2 Noyau d'une matrice

Définition 13. Le noyau de la matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{K}^p$ solutions de $AX = 0_n$.

On note $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathbb{K}^p,\ AX = 0_n\}$ cet ensemble.

Un ensemble de $\mathbb{R}^p$ décrit à l'aide d'équations linéaires peut toujours s'interpréter comme le noyau d'une matrice.

Méthode 4.

Pour trouver un système de générateurs d'un noyau de matrice, on résout le système $AX = 0$ à l'aide de la méthode du pivot. En notant $t_1, \dots, t_k$ les paramètres, les solutions du système sont de la forme $X = t_1V_1 + \dots + t_kV_k$. On a alors par définition, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_k)$.

Exemple 16. Donner un système de générateurs du noyau de la matrice H de l'exemple 15

Exemple 17. Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_3\}$.

Déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ AX = U \wedge X$.

Donner le noyau et l'image de A, interpréter géométriquement ces résultats.

Remarque 12. Dans la méthode précédente, le nombre de paramètres $p - r$ définit la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$. C'est le nombre minimal de vecteurs générateurs de cet ensemble. On remarque que $\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$. C'est le « théorème du rang ».

4. Matrice transposée

Définition 14. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La *transposée* de A est la matrice ${}^{\mathrm{t}}A = (a'_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ où :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;n]\!],\ a'_{ij} = a_{ji}$$

La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

L'ensemble des *matrices symétriques* d'ordre n est $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ :\ A = {}^{\mathrm{t}}A\}$.

L'ensemble des *matrices antisymétriques* d'ordre n est $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ :\ A = -{}^{\mathrm{t}}A\}$.

Exemple 18. ✎ Calculer la transposée de chacune des matrices de l'exemple 1.

Proposition 8. Propriétés de la transposition

On a :

① $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad {}^{\mathrm{t}}\,{}^{\mathrm{t}}A = A$.

② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad {}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$.

③ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad {}^{\mathrm{t}}(\lambda A + B) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B$.

④ $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\quad {}^{\mathrm{t}}(A^{-1}) = ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}$.

Démonstration. À partir de la définition 14 □

Exemple 19. Vérifier que pour tous $(U, V) \in \mathbb{R}^3,\ U \cdot V = {}^{\mathrm{t}}UV$.

TD du § 9

Exercice 1. Résolution de systèmes dépendant d'un paramètre
Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre m :

① $\begin{cases} mx + y = 2m-1 \\ x + my = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - my + z = m-1 \\ mx - my + z = m^2-1 \end{cases}$

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires
Résoudre le système linéaire :

① $\begin{cases} (1+\mathrm{i})x + \mathrm{i}z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + \mathrm{i}y + z = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}x + y + \mathrm{i}z = 0 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}x + y - \mathrm{i}z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Exercice 3. Tétraèdres isopérimétriques
Montrer que les faces d'un tétraèdre isopérimétrique (ses faces sont des triangles de même périmètre) sont des triangles isométriques.
On pourra noter p le périmètre des faces d'un tétraèdre $ABCD$ et $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = AD$, $b' = BD$ et $c' = CD$, et résoudre un système linéaire de 4 équations à 6 inconnues.

Exercice 4. Rang d'une matrice paramétrée ATS 2011
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-t & -t \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$, déterminer son rang, son noyau et son image.

Exercice 5. Inversibilité d'une matrice à paramètre ATS 2010
Pour quelles valeurs du réel m la matrice suivante est–elle inversible ? Donner son rang en fonction de m.
$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & 2m \\ 2 & m & 2m+1 \\ -1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Puissances d'une matrice diagonalisable
On présente une méthode pour calculer les puissances d'une matrice semblable à une matrice diagonale.

① Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $D = P^{-1}MP$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = PD^kP^{-1}$.

② Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.

③ Calculer M^k pour tout entier naturel k.

Exercice 7. Puissances de la somme d'une matrice nilpotente et d'une homothétie
Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = T - \mathrm{Id}_3$.

① Calculer N^k pour tout entier naturel k.

② En déduire T^k à l'aide de la formule du binôme, dont on justifiera l'emploi.

③ Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 8. Produit par une matrice $(3,4)$
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un système de générateurs de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9. Groupe orthogonal spécial du plan euclidien

Pour tout réel θ, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

① Calculer $R_\theta R_{\theta'}$ pour tous réels θ et θ'. Montrer sans calcul matriciel supplémentaire :
$\star$ que $\mathrm{Id}_2 = R_0$,
$\star$ que $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$,
$\star$ que R_θ est inversible pour tout θ, et déterminer son inverse.

② Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $v = R_\theta u$.
Montrer que $\|v\| = \|u\|$. Calculer le produit scalaire $\langle u|v\rangle$ et le déterminant $\det(u, v)$.
En déduire que l'application linéaire canoniquement associée à R_θ est la rotation vectorielle d'angle θ.

Exercice 10. Étude d'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

On a défini ci–dessous une application $\mathcal{L}$. Vérifier que l'application $\mathcal{L}$ est linéaire.

Déterminer un système de générateurs de son noyau, et décrire son image par un système d'équations linéaires.

Préciser si $\mathcal{L}$ est injective, surjective ou bijective.

① $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2x - y + z)$
② $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + 3z + 4t, -x - y + z)$
③ $\mathcal{L} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_1 + x_3 + x_5, x_2 + x_4)$
④ $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, x + y - z, x - y + z)$

Exercice 11. Matrices nilpotentes

Une matrice carré A est dite nilpotente s'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $A^r = 0$.

① Démontrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

② Soit A une matrice nilpotente. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Id} - A)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k = \mathrm{Id} - A^{p+1}$.
En déduire que $\mathrm{Id} - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

③ En déduire que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Centre d'un groupe matriciel

Soit $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

① Démontrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
② Vérifier que tout élément de $\mathcal{E}$ est inversible et a son inverse dans $\mathcal{E}$.
③ Le centre de $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{E},\ \forall M \in \mathcal{E},\ MA = AM\}$. Déterminer $\mathcal{C}$.

Exercice 13. Diviseurs de zéro et inversibilité

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet des diviseurs de zéro si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AB = 0$.

On va démonter qu'une matrice admet des diviseurs de zéro si et seulement si elle n'est pas inversible.

① Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui admet des diviseurs de zéro.
② On suppose A inversible et $AB = 0$. Montrer qu'alors $B = 0$.
③ On suppose que A n'est pas inversible. Justifier l'existence d'un vecteur v non nul dans $\mathrm{Ker}(A)$.
Que vaut Av ? En déduire une matrice B non nulle telle que $AB = 0$.
④ Conclure.

Exercice 14. Polynôme annulateur d'une matrice 2×2

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

① Vérifier que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\mathrm{Id}_2 = 0_{2,2}$.
② En déduire que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, obtenir alors une expression de A^{-1}.
③ Une matrice A est dite idempotente si et seulement si $A^2 = A$.
Donner l'ensemble des matrices idempotentes. Donner trois exemples.

Bilan du § 9

Prérequis

① §1 Logique : Récurrence, formule du binôme, coefficients binomiaux

② §6 Géométrie spatiale : équations et systèmes paramétriques de droites, de plans.

Objectifs prioritaires

① savoir effectuer un produit de matrices, en maîtriser les propriétés (section 1.4) . . . ☐
- (a) exemples 6 et 7 . . . ☐
- (b) exercice 6, 9 et 7 . . . ☐

② savoir les propriétés et la définition de l'inverse d'une matrice (section 1.5) . . . ☐
- (a) savoir calculer une inverse par la méthode du pivot (section 2.4) et exemple 13 . . . ☐
- (b) exercice 9 . . . ☐

③ savoir former la matrice d'une application linéaire et connaître ses propriétés (remarque 3) . . . ☐
- (a) exemple 5 et exercice 8 . . . ☐

④ savoir résoudre un système linéaire par la méthode du pivot (2.2) . . . ☐
- (a) savoir refaire les exemples 10 et 11 . . . ☐
- (b) savoir refaire l'exercice 1 . . . ☐

⑤ connaître la notion de rang d'une matrice (section 2.5) . . . ☐

⑥ connaître les concepts d'image et de noyau d'une matrice (section 3) . . . ☐

Objectifs secondaires

① connaître la définition et les propriétés de la transposée : 4 . . . ☐

Approfondissement

① connaître les définitions théoriques (par exemple la définition 5 du produit), . . . ☐

② connaître les matrices d'opérations élémentaires (section 1.6) . . . ☐

③ comprendre la notion de dimension d'un espace engendré (remarque 11) . . . ☐