§ 8 : Suites réelles et complexes

1. Notion de suite

1.1 Définition et exemples

Définition 1. Une *suite réelle* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n par la suite u se note $u(n) = u_n$, on l'appelle le *terme* de *rang* n de la suite (u_n) (ou le terme d'*indice* n).

De même, une *suite complexe* est une fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1. La suite est notée entre parenthèses $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un terme de la suite, sans parenthèse : u_n. (même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).

Une suite peut être définie à partir d'un entier n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$, les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geqslant n_0$).

⚠ une suite ne peut pas être dérivée : pour être dérivable en x, une fonction doit être définie sur un intervalle, qui n'est pas réduit à un nombre, et qui contient x.

Exemple 1. ✎ *Suites explicites.* Une suite (u_n) est *explicite* si elle est définie par une fonction f et la relation $u_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n^2$. Calculer u_0, u_1, u_2, $u_n + 1$ et u_{n+1}.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_{2n} et v_{2n+1}.

Exemple 2. ✎ *Suites définies par récurrence.* Une suite est définie par *récurrence* lorsqu'on en donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation qui permet de définir un terme en fonction de termes précédents :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} = a_n - 2$. Donner a_1, a_2, a_3 et a_n.

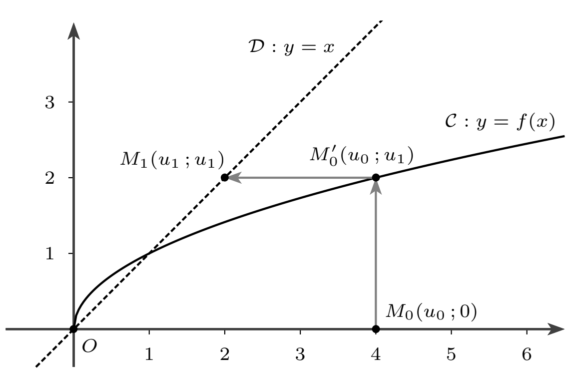
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = (n+1)b_n$. Donner b_1, b_2, b_3, b_4 et b_n.

Exemple 3. ✎ *Suites sommes.* Soit (c_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} 2^{n+1}$. Expliciter c_n.

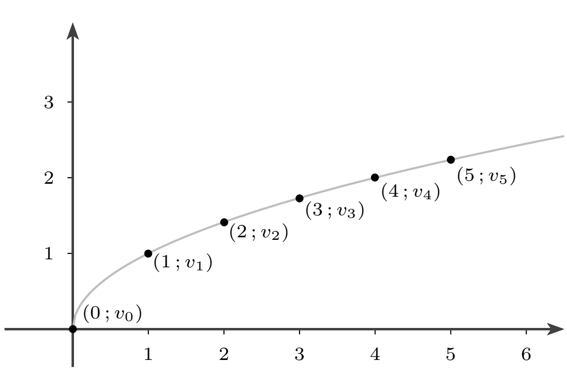
1.2 Représentation des suites réelles

Méthode 1. Représenter une suite réelle définie par récurrence

Pour représenter une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on trace la courbe $\mathcal{C}$ de f et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. On place le point M_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$. On représente la suite en itérant le procédé suivant. On représente le point M_{n+1} d'abscisse u_{n+1} à partir du point M_n d'abscisse u_n en traèant :
- ⋆ le point $M'_n(u_n\,;u_{n+1})$ d'intersection de la parallèle à (Oy) passant par M_n avec la courbe $\mathcal{C}$.
- ⋆ le point $M_{n+1}(u_{n+1}\,;u_{n+1})$ d'intersection de la parallèle à (Ox) passant par M'_n avec la droite $\mathcal{D}$.



Suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$



Suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sqrt{n}$

L'ensemble des points de coordonnées $(n\,;f(n))$ représentent les termes d'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie explicitement par $v_n = f(n)$.

⚠ Ces deux façons de générer des suites produisent des suites différentes pour une même fonction f.

1.3 Suites remarquables

Les deux propositions qui suivent se prouvent par récurrence.

Définition 2. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *arithmétique* de raison $r \in \mathbb{C}$, si et seulement si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 1.

① $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est arithmétique de raison r si et seulement si, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = r \times (n - n_0) + u_{n_0}$.

② $\forall n \in \mathbb{N},\ 0+1+2+\dots n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

③ Si u est arithmétique de raison r, $\sum u_k =$ (nb de termes) $\times$ (moyenne des extrêmes)

Exemple 4. Montrer que la somme des n premiers nombres impairs est un carré.

Définition 3. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite *géométrique* de *raison* $q \in \mathbb{C}$, si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 2.

① $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* de raison q, si et seulement si, $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = q^n \times u_{n_0}$.

② si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

③ Si u est géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum u_k = (1^{\text{er}}\text{ terme}) \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$

Exemple 5. Nature et forme récurrente de la suite (v_n) de l'exemple 1 ? De la suite (w_n) de l'exemple 2 ?

Exemple 6. ✎ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$. Démontrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 2$ est géométrique. En déduire une forme explicite de u.

1.4 Opérations sur les suites

Définition 4. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni de trois opérations :

① une addition (interne) : pour toutes suites u et v, $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

② une multiplication (externe) : pour tout réel λ et toute suite u, $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

③ une multiplication (interne) : pour toutes suites u et v, $u\,v = (u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes est muni des même opérations (avec une multiplication externe par un nombre complexe λ)

1.5 Suites bornées

Définition 5. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geqslant n_0,\ |u_n| < M$. En écriture symbolique : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| < M$.

Exemple 7. ✎ Montrer que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définir avec des quantificateurs ce qu'est une suite non bornée et vérifier que $(n - n\mathrm{i})_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

2. Limites de suites

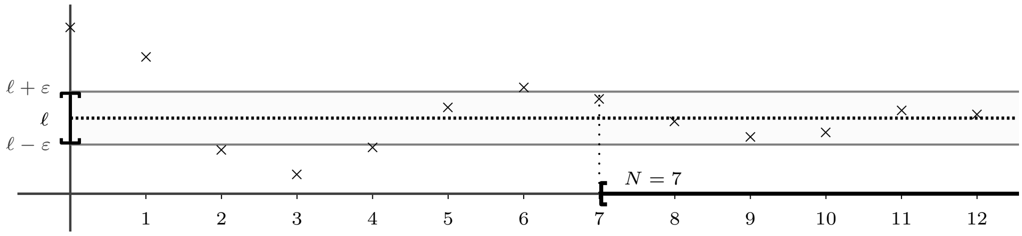
2.1 Suites convergentes

Définition 6. Une suite converge vers 0 si et seulement si, pour tout réel strictement positif (même petit) ε, il existe un rang au delà duquel tous les termes de la suite ont un module plus petit que ε. Symboliquement : u converge vers 0 $\iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n| < \varepsilon$.

Une suite u est *convergente*, de limite $\ell \in \mathbb{C}$, si et seulement si la suite $u - \ell$ converge vers 0.

On écrira : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \longrightarrow \ell$.

Si la suite u n'est pas convergente, elle est dite *divergente*.



Remarque 2. Si une suite converge, sa limite est unique.

Exemple 8. ✎ Montrer avec la définition que la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Montrer avec la définition que la suite constante $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exemple 9. ✎ Démontrer qu'une suite convergente est bornée. En déduire que $(n - \mathrm{i}n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Proposition 3. Opérations sur les suites convergentes

Soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Alors :

- ⋆ $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$
- ⋆ λu converge vers $\lambda\ell$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- ⋆ uv converge vers $\ell\ell'$.
- ⋆ $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$, si v n'a pas de terme nul, et $\ell' \neq 0$.
- ⋆ la *suite extraite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si φ est une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to\ell} f(x)$ si f est une fonction continue en ℓ.

Exemple 10. Utiliser l'avant–dernier point avec $\varphi(n) = 2n$ puis $\varphi(n) = 2n + 1$, pour prouver que la suite v, définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n$, diverge.

2.2 Suites réelles qui divergent vers l'infini

Définition 7. Une suite réelle est *divergente vers plus l'infini* si et seulement si, pour tout réel A fixé (même grand), il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A. Symboliquement : $u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n > A$.

Une u suite diverge vers moins l'infini si $-u$ diverge vers $+\infty$.

⚠ cette notion n'a pas de sens pour les suites complexes.

Exemple 11. Démontrer avec la définition que $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 3. Les opérations obéissent aux règles habituelles, les formes indéterminées qui nécessitent une étude plus poussée sont « $\infty - \infty$ », « $\infty \times 0$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ».

Exemple 12. ✎ Déterminer le comportement à l'infini de $n\ln(n)$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$, $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$.

3. Méthodes de comparaison

3.1 Théorème d'encadrement

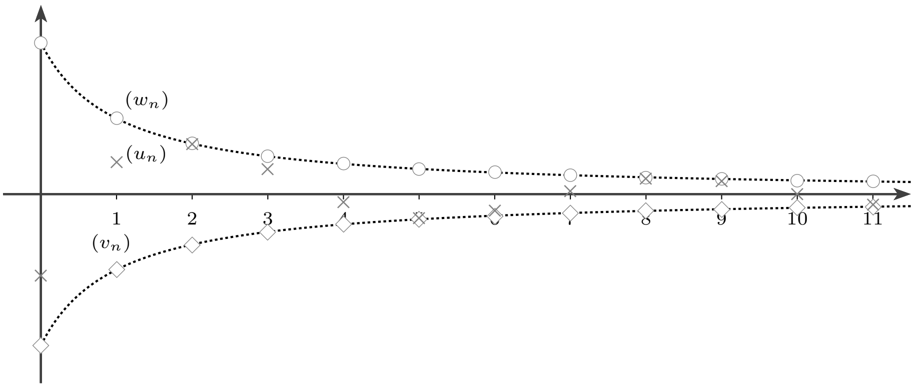
Théorème 4. d'encadrement

① si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

② si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

③ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque 4. Le point ③ est parfois appelé « théorème des gendarmes »



Démonstration. ① : on doit prouver que pour tout $A > 0$, il existe un rang N à partir duquel $u_n > A$.

Soit $A > 0$. Comme $v_n \longrightarrow +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n > A$. Or $u_n > v_n$ donc $u_n > v_n > A$. D'où par définition, $u_n \longrightarrow +\infty$.

② : par hypothèse, $-v_n \leqslant -u_n$ avec $-v_n \longrightarrow +\infty$, donc d'après ①, $-u_n \longrightarrow +\infty$, d'où $u_n \longrightarrow -\infty$.

③ : Quitte à soustraire ℓ aux trois suites, on peut supposer $\ell = 0$. Comme (v_n) et (w_n) convergent vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que si $n \geqslant N_1$, $|v_n| < \varepsilon$ et si $n \geqslant N_2$, $|w_n| < \varepsilon$. Pour tout $n > N = \max(N_1, N_2)$ on a donc $-\varepsilon < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \varepsilon$ donc $|u_n| < \varepsilon$: (u_n) converge vers 0. ☐

Exemple 13. ✎ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n$.

Exemple 14. En tenant compte de l'inégalité de Bernoulli $\forall x \in \,]-1\,;+\infty[,\ \forall n > 0,\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (qui se prouve par récurrence), démontrer que $q^n \longrightarrow +\infty$ si $q > 1$, puis que $q^n \longrightarrow 0$ si $|q| < 1$.

Remarque 5. Les inégalités larges passent à la limite (si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$) mais pas les inégalités strictes.

Remarque 6. Une suite complexe u converge si et seulement si $|u|$ converge par définition. Si α est une suite réelle, convergente vers 0, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \alpha_n$, le point ② du théorème 4 permet ainsi d'affirmer que si $u_n \longrightarrow 0$.

3.2 Relation de prépondérance

Définition 8. La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite complexe, de termes non nuls, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\varepsilon_n \longrightarrow 0 \text{ et } \forall n \geqslant n_0,\ u_n = \alpha_n \varepsilon_n.$$

On écrit, avec la notation de Landau : $u_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$. En sciences physiques, on écrira parfois $u_n \ll \alpha_n$

Remarque 7. En pratique, pour démontrer que $u_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$, on vérifie que $\dfrac{u_n}{\alpha_n} \longrightarrow 0$.

Exemple 15. ✎ Montrer que $n+6 = \mathrm{o}(n^2)$, que $\dfrac{1}{n} = o(1)$ et que $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exemple 16. ✎ Montrer que si u est bornée et si v diverge vers $+\infty$, $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exemple 17. ✎ Que signifie $u_n = \mathrm{o}(1)$?

Proposition 5. Croissances comparées des suites de référence

On a : $\ln(n) \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$ avec $\alpha > 0$ et $a > 1$. En détail :

① Soient $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $\ln(n)^\alpha = \mathrm{o}(\ln(n)^\beta)$.

② Soient $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha > 0$. Alors $\ln(n)^\beta = \mathrm{o}(n^\alpha)$.

③ Soient $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$.

④ Soient $(\alpha\,;a) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a > 1$. Alors $n^\alpha = \mathrm{o}(a^n)$.

⑤ Soient $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. Alors $a^n = \mathrm{o}(b^n)$.

⑥ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a^n = o(n!)$.

3.3 Relation d'équivalence

Définition 9. Les suites complexes (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite $(\imath_n)$ telle que

$$\imath_n \longrightarrow 1 \text{ et } \forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n \imath_n$$

On écrit alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 8 (Première application). Soient deux suites équivalentes u et v : $u_n \sim v_n$. Alors :

- ⋆ u est convergente si et seulement si v est convergente, et dans ce cas u et v ont même limite.
- ⋆ si $u_n \longrightarrow +\infty$, alors $v_n \longrightarrow +\infty$, si $u_n \longrightarrow -\infty$, alors $v_n \longrightarrow -\infty$

Méthode 2. Critères d'équivalence

Si les termes de la suite v sont non nuls, on a les critères suivants :

① $u_n \sim v_n \iff v_n = u_n + \mathrm{o}(v_n)$ ② $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

Exemple 18. ✎ (Théorème du plus haut degré). Soient $(a_0\,;a_1\,;\ldots;a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $a_p \neq 0$.
Montrer que $a_p n^n + \ldots a_1 n + a_0 \sim a_p n^p$.

Proposition 6. Taux d'accroissements

Soit f une fonction dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$, et u une suite de termes non nuls, qui converge vers 0. Alors $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$. En particulier :

① $\ln(1+u_n) \sim u_n$	③ $\sin(u_n) \sim u_n$	⑤ si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
② $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$	④ $\tan(u_n) \sim u_n$	⑥ $1 - \cos(u_n) \sim \frac{1}{2}u_n^2$

Démonstration. Si $f'(0) \neq 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{hf'(0)} = 1$, et par composition : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(0)}{u_n f'(0)} = 1$ □

Remarque 9. ⚠ il est en général faux d'écrire : $u_n \sim v_n \implies f(u_n) \sim f(v_n)$. Considérer $f = \exp$, $u = (n^2+n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 10 (Seconde application). Si u et v sont équivalentes et que les termes de v sont non nuls, alors u et v sont de même signe à partir d'un certain rang (car $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$).

3.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 7. Produits et quotients d'équivalents

Soient u, v et a, b quatre suites telles que $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$. Alors
① $u_n a_n \sim v_n b_n$ ② $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ③ $\dfrac{u_n}{a_n} \sim \dfrac{v_n}{b_n}$ où les termes de a et b sont non nuls

Méthode 3. Équivalents de sommes ou différences

⚠ Un équivalent d'une somme n'est pas toujours la somme des équivalents : considérer par exemple les suites $(n - n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour trouver un équivalent d'une somme finie, on cherche à prouver que ses termes sont négligeables devant l'un d'entre eux : méthode 2, ①. Le terme prépondérant est alors l'équivalent recherché.

Exemple 19. Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de :

① $n^2 - 5n + \ln(n)^4$ ② $\dfrac{n^2 \sin(\frac{1}{n})}{2n+1}$ ③ $\dfrac{n3^n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{3^n + n^3}$ ④ $n \ln \sqrt{\dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}}}$

4. Suites réelles

4.1 Suites monotones

Définition 10. Une suite (u_n) est, à partir du rang n_0,

- ⋆ *strictement croissante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- ⋆ *strictement décroissante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.
- ⋆ *strictement monotone* si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- ⋆ *constante* si et seulement si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit une suite *croissante*, *décroissante* ou *monotone* de même, avec des inégalités larges.

Proposition 8.

La suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est strictement croissante à partir du rang n_0 si
① pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
② pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Remarque 11. On obtient des critères pour les suites croissantes en remplaçant les inégalités finales par des inégalités larges. Les critères pour les suites strictement décroissantes et décroissantes s'obtiennent en changeant le sens de la dernière inégalité.

Démonstration. ✎ à partir de la définition.

Exemple 20. Étudier la monotonie des suites :

① (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

② (b_n) définie $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 3^n$

③ (k_n) arithmétique, de raison r

④ (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 - n$

Remarque 12 (Suites explicites). une suite définie par $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ où f est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ peut s'étudier à travers f :

- ⋆ si f est monotone sur $[n_0\,;+\infty[$, u a la même monotonie à partir du rang n_0.
- ⋆ si f a une limite en $+\infty$, u a la même limite en $+\infty$.

⚠ l'absence de limite ou de monotonie pour f ne signifie rien pour u : considérer par exemple $f : x \mapsto x\cos(2\pi x)$ et $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

4.2 Critère de convergence monotone

DÉFINITION 11. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- ⋆ *minorée* $\iff \exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$. ($m$ est un minorant)
- ⋆ *majorée* $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. ($M$ est un majorant)

EXEMPLE 21. ✎ Prouver que toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

THÉORÈME 9. CONVERGENCE MONOTONE

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

REMARQUE 13 (arguments moraux.). une suite croissante ne peut « osciller » ni tendre vers $-\infty$, et une suite majorée ne peut tendre vers $+\infty$: une suite vérifiant ces deux propriétés converge.

EXEMPLE 22. ✎ Donner un exemple de suite croissante qui diverge, et de suite majorée qui diverge.

EXEMPLE 23. Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Conjecturer la monotonie et un minorant de la suite u à partir du graphique de la méthode 1.

Démontrer les conjectures puis la convergence de la suite u.

MÉTHODE 4. « du point fixe »

Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une application continue sur un intervalle I (de la forme $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b]$ ou $]-\infty\,;+\infty[$ avec a et b réels), tel que I contient tous les termes de la suite.
Si u converge vers une limite ℓ, cette limite est une solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ sur I (on dit que ℓ est un *point fixe* de f).
En effet, $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$ par continuité de f.
⚠ cette méthode permet de trouver des limites potentielles mais ne prouve en aucun cas la convergence de u. Pour cela, il faut recourir à d'autre arguments, comme le théorème de convergence monotone.

EXEMPLE 24. Déterminer la limite de u définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Suites adjacentes

DÉFINITION 12. Les suites u et v sont dites *adjacentes* si et seulement si : ① la suite u est croissante. ② la suite v est décroissante. ③ $v_n - u_n \longrightarrow 0$.

THÉORÈME 10. DES SUITES ADJACENTES.

Deux suites u et v adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ.
De plus $u_n \leqslant \ell \leqslant v_m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme v décroît, $v_{n+1} \leqslant v_n$ et comme (u_n) croît, $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par différence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$.

Or $v_n - u_n \longrightarrow 0$, donc la suite $v - u$ décroit vers 0 : ses termes sont positifs : $v_n - u_n \geqslant 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ (car (u_n) croît). Ainsi, la suite v est minorée par u_0 et décroissante par hypothèse, donc converge vers une limite ℓ. De plus, $u_n = (u_n - v_n) + v_n \longrightarrow 0 + \ell = \ell$. Donc les deux suites convergent vers la même limite.

EXEMPLE 25. Soient u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

① Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

② Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

③ En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v.

Bilan du § 8

Prérequis

① §1 Logique. Démonstration par récurrence, sommes de référence, sommes télescopiques ☐
② §4 Fonctions usuelles. Tout ☐

Objectifs prioritaires

① formes récurrente, explicite et formule de somme des suites arithmétiques et géométriques 1.3 ☐
  (a) exercice 6 et 5 ☐
② connaître la définition d'une suite bornée : 1.5 ☐
③ savoir utiliser le théorème d'encadrement 4 ☐
④ savoir reconnaître une suite négligeable devant une autre 3.2 ☐
⑤ maîtriser la notion de suites équivalentes 3.3 ☐
  (a) connaître le critère pratique d'équivalence : méthode 2 ☐
  (b) connaître les équivalents remarquables : proposition 6 ☐
  (c) savoir trouver l'équivalent d'un produit ou d'un quotient : proposition 7 ☐
  (d) savoir trouver l'équivalent d'une somme ou d'une différence : 3 ☐
  (e) exercices 1, 2, 3 ☐
⑥ savoir étudier la monotonie d'une suite réelle 4.1 ☐
⑦ maîtriser le théorème de convergence monotone 4.2 ☐
  (a) savoir utiliser le théorème 9 de convergence monotone ☐
  (b) savoir trouver une limite par la méthode du point fixe 4 ☐
  (c) exercice 5, 4 et 10 ☐
⑧ connaître la définition des suites adjacentes, et leur théorème de convergence 4.3 ☐
  (a) exercices 7 et 8 ☐

Objectifs secondaires

① savoir représenter une suite 1.2 ☐

Approfondissement

① savoir utiliser les définitions 6 et 7 d'une suite convergente ou divergente vers l'infini ☐

TD du § 8

Exercice 1. Équivalent d'une suite
Donner un équivalent simple, puis le comportement asymptotique, de la suite définie par :
① $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ② $\forall n \geqslant 2,\ v_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$ ③ $\forall n \geqslant 1,\ w_n = n^{1/n} - 1$
④ $\forall n \geqslant 1,\ s_n = n \sin \dfrac{1}{n^2}$ ⑤ $\forall n \geqslant 1,\ t_n = \ln(n+1) - \ln n$ ⑥ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \tan \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 2. Équivalents de sommes
Montrer que ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$. ② $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k} \sim \frac{1}{n^n}$.

Exercice 3. Suite implicite avec partie entière
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe sur $[n\,; n+1[$ une unique solution u_n à l'équation $x - \mathrm{E}(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Montrer que $u_n \sim n$. En déduire un équivalent simple de $u_n - n$.

Exercice 4. Prépondérance de factorielle sur les exponentielle de base a
On souhaite prouver que $\forall a \in \mathbb{C},\ a^n = \mathrm{o}(n!)$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite u par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

① Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{a}{n+1} u_n$.
② En déduire que la suite u est décroissante à partir d'un certain rang, et qu'elle est convergente.
③ Déterminer la limite de la suite u et conclure.
④ Conclure.

Exercice 5. Étude d'une suite homographique
Soit $f :]-\infty\,; 6[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{9}{6-x}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Dresser le tableau de variations de f. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 3$.
Étudier la monotonie, la convergence et la limite éventuelle de u.
② Soit v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Quelle est sa nature ? En déduire une expression explicite de u et vérifier les résultats de la question précédente.

Exercice 6. Suites arithmético-géométriques
Soient a et b deux complexes et la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

① Quelle est la nature de la suite u si $a = 0$? si $a = 1$? si $b = 0$? Dans ces trois cas, donner une expression de u_n en fonction de n et discuter la convergence de u.
② On suppose dans la suite que $a \neq 1$. Résoudre $a\alpha + b = \alpha$. Soit v la suite définie par $\forall a \in \mathbb{R},\ v_n = u_n - \alpha$. Montrer que v est géométrique, en donner la raison.
③ En déduire un expression en fonction de n de v_n puis de u_n. Discuter la convergence et la limite de u, lorsque $|a| > 1$ et $|a| < 1$.
④ À quelle condition sur a la suite u est-elle périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 7. Divergence de la série harmonique
L'objectif est d'étudier le comportement de la suite h définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① Soient les suites u et v définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = s_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
Montrer qu'elles sont adjacentes. On note γ leur limite commune (appelée constante d'Euler).
Les mathématiciens ignorent encore si γ est un nombre rationnel ou pas.
② En déduire $s_n \sim \ln(n)$. Que dire de la convergence de s ?

Exercice 8. Théorème des valeurs intermédiaires
L'objectif du problème est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

On suppose que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

① Montrer que $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique. (on pourra distinguer deux cas).

② Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$. En justifiant soigneusement le passage à la limite, montrer que $f(\ell) = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

④ Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et y compris entre $g(a)$ et $g(b)$. Soit $f(x) = g(x) - y$. Montrer que l'équation $g(x) = y$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Exercice 9. Écriture fractionnaire d'un nombre à partie décimale périodique
L'objectif est d'écrire le nombre 0,27272727… sous forme de fraction.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$.

Soit (s_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3 ainsi que s_0, s_1, s_2 et s_3. On exprimera les résultats sous forme de nombres décimaux.

② Donner, sous forme décimale, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

③ Pour tout entier naturel n, exprimer s_n en fonction de n.

④ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ sous forme d'une fraction et conclure.

⑤ Imiter la démarche pour obtenir l'écriture de 0,481481481… sous forme de fraction.

Exercice 10. Suites de Héron
L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples.

Soit $a \in [1\,;+\infty[$ et f la fonction $f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} + x\right)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [\sqrt{a}\,;a]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

① Dresser le tableau de variations de la fonction f.

② Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.
En déduire : $\forall x \in [\sqrt{a}\,;a],\ f(x) \in [\sqrt{a}\,;a]$.

③ Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\sqrt{a}\,;a]$. (ainsi $u_n \neq 0$, donc la suite est bien définie)

④ Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.

⑤ Démontrer que ℓ vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\ell} + \ell\right)$. En déduire la valeur de la limite ℓ.

⑥ Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction. À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$?

⑦ Dans cette question et les suivantes, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n).
On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$.
On suppose que u_0 approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leqslant v_0 \leqslant 0{,}5$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leqslant v_n^2$.

⑧ Par récurrence, prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n < \dfrac{1}{2^{2^n}}$

⑨ En déduire $v_4 < 10^{-4}$. À partir de quel rang n peut-on dire la suite (u_n) approche $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?