§ 7 : Équations différentielles

1. Généralités sur les équations différentielles

1.1 Approche graphique

Notation 1. Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$.

> Définition 1. Une *équation différentielle d'ordre n* est une égalité liant la variable réelle x, une fonction inconnue y, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et ses dérivées successives $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.
>
> L'équation est dite *scalaire* lorsque y est à valeurs dans $\mathbb{K}$, (c'est la situation que nous étudierons ici) et *vectorielle* lorsque y est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ (que nous rencontrerons dans un chapitre ultérieur).

Exemple 1. Les équations qui suivent sont des équations différentielles scalaires. Toutes sont d'ordre 1 sauf l'équation ⑦, qui est d'ordre 2 :

① $y'^2 + yy' + xy = 0$	③ $y' = 2x$	⑤ $y' = y^2 - x$	⑦ $y'' + 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2x}$
② $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$	④ $y' = y - x$	⑥ $y' = y^2\mathrm{e}^x$	

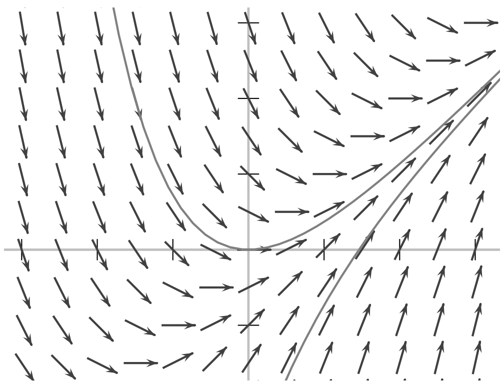
Définition 2. Une équation différentielle du premier ordre est dite *résolue* en y' si elle peut s'écrit sous la forme $y' = f(x\,;y)$, où f est continue (1) sur une partie de $\mathbb{R}^2$ (souvent le produit de deux intervalles $U =]a\,;b[\times]c\,;d[$).

Exemple 2. À l'exception des équations ① et ⑦, toutes les équations de l'exemple 1 sont résolues en y'.

> Définition 3. Une *solution maximale* de l'équation $y' = f(x\,;y)$, est une fonction y satisfaisant l'équation, et définie sur un intervalle I maximal (2).
>
> *Résoudre* (ou *intégrer*) une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions maximales.
>
> On appelle *courbe intégrale* la courbe représentative d'une fonction maximale.

Exemple 3. On apprendra à résoudre certaines équations différentielles. Pour beaucoup d'entre elles, on est incapable d'exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles (c'est le cas pour l'équation ⑤ de l'exemple 1).

Pour connaître l'allure des courbes intégrales d'une équations différentielle du premier ordre résolue en y, on peut représenter des vecteurs du champ de vecteur associé.
La courbe intégrale d'une solution y, passant par $(x_0\,;y_0)$, admet en ce point une tangente dirigée par $\vec{u}_{(x_0;y_0)} = (1\,;y'(x_0)) = (1\,;f(x_0\,;y_0))$. L'application qui associe à un couple $(x_0\,;y_0)$ du domaine de définition de f le vecteur $\vec{u}_{(x_0;y_0)}$ est le *champ de vecteurs* associé à l'équation $y' = f(x\,;y)$.
On a représenté ci contre les vecteurs du champ associé à l'équation ④ de l'exemple 1 aux points de coordonnées demi-entières, ainsi que deux courbes intégrales
Graphiquement, que peut-on dire des solutions de $y' = x - y$?



1.2 Problème de Cauchy

> Définition 4. Un *problème de Cauchy* est la donnée d'une équation différentielle d'ordre n, et de n conditions initiales sur les valeurs de la fonction y et de ses dérivées en un réel x_0, satisfaites par la solution cherchée : par exemple $y(0) = 1$.

(1). f est continue en $(x_0\,;y_0) \in]a\,;b[\times]c\,;d[$ si $|f(x\,;y) - f(x_0\,;y_0)| \xrightarrow[\|(x_0-x;y_0-y)\|\to 0]{} 0$

(2). ce qui signifie qu'il n'existe pas de solution égale à y sur I mais définie sur un intervalle strictement plus grand.

On peut observer sur l'exemple 3 que les courbes intégrales remplissent le plan et ne se croisent pas. Il s'agit d'un résultat général, admis, que l'on exprime ainsi :

Théorème 1. de « Cauchy-Lipschitz »

Soient I et J deux intervalles et f une fonction continue sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la deuxième variable, le *problème de Cauchy* :

$$y' = f(x\,;y) \text{ et } y(x_0) = y_0 \text{ avec } (x_0\,;y_0) \in I \times J$$

admet une unique solution maximale.

Remarque 1. Le théorème reste valable pour les équations différentielles vectorielles, pour y et f à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ et J un ensemble *ouvert* de $\mathbb{K}^n$ (défini par des inégalités strictes, par exemple $]2\,;3[\times]0\,;1[\subset \mathbb{R}^2$.

1.3 Équations scalaires du premier ordre à variables séparées

Définition 5. Une équation scalaire du premier ordre est *à variables séparées* lorsqu'on peut l'écrire sous la forme $y'p(y) = q(x)$ avec q une fonction continue sur un intervalle I et p une fonction continue, qui ne s'annule pas, sur un intervalle J.

Remarque 2. Soient P une primitive de p sur J et Q une primitive de q sur I. L'équation équivaut à $P(y) = Q(x) + c$ où c est constante.

Comme p ne s'annule pas et qu'elle est continue sur un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires assure que p est de signe constant. Ainsi, P est strictement monotone (et continue, car dérivable), donc établit une bijection de J sur $P(J)$. Les solutions maximales sont donc de la forme $y = P^{\langle -1\rangle}(Q(x)+c)$ (sur les intervalles où elles existent) avec c une constante réelle.

Exemple 4. l'équation ② de l'exemple 1 : $y' = ay$ admet la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ comme solution. Le théorème 1 assure que les autres solutions ne s'annulent pas, donc vérifient $\frac{y'}{y} = a$, c'est-à-dire $\ln|y| = ax + c$. Ainsi, $|y| = \mathrm{e}^{ax+c} = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K = \mathrm{e}^c$ est une constante strictement positive. Comme y ne s'annule pas et qu'elle est continue, elle ne change pas de signe, ainsi $y = K\mathrm{e}^{ax}$ ou $y = -K\mathrm{e}^{ax}$ avec $K > 0$. En résumant les cas observés, les solutions maximales sont de la forme $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Remarque 3. Lorsqu'on cherche la solution d'un problème de Cauchy, on résout l'équation en générale et on utilise les conditions initiales pour obtenir les constantes.

Exemple 5. ✎ Résoudre le problème de Cauchy : $y' = ay$ et $y(0) = 2$.

Remarque 4. Si, comme dans l'exemple 4, la fonction q est constante, l'équation est dite *incomplète en x*.

Exemple 6. ✎ Trouver a priori le sens de variation des solutions de l'équation ⑥ $y' = y^2\mathrm{e}^x$, puis la résoudre.

1.4 Équations différentielles linéaires

Définition 6. Une équation différentielle d'ordre n est dite *linéaire* lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme

$$(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

où $a_n, \ldots, a_0$ et f sont des fonctions continues sur un intervalle I.

La fonction f est le *second membre* de l'équation différentielle linéaire.

Si f est la fonction nulle, l'équation différentielle linéaire est dite *sans second membre*.

Si les fonctions $a_n, \ldots, a_0$ sont des constantes (mais pas nécessairement le second membre f), l'équation différentielle linéaire est à *coefficients constants*.

Remarque 5. Sur un intervalle I où a_n ne s'annule pas, le problème de Cauchy :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)},\ (x_0\,;y_0 \ldots y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

admet une unique solution. C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz (on peut interpréter les équations scalaires d'ordre n comme des équations vectorielles d'ordre 1).

Théorème 2. Structure des solutions

Soit une équation différentielle d'ordre n (E) : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$, où $a_n, \ldots, a_0, f$ sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et où a_n ne s'annule pas.
Si y est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont de la forme $y + y_0$ où y_0 est une solution de l'équation sans second membre (E_0) : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Démonstration. ✎ On considère une solution φ de (E) et on prouve que $y_0 = \varphi - y$ est solution de (E_0). On en déduit que $\varphi = y + y_0$. On vérifie réciproquement que $y + y_0$ est solution de (E). □

Remarque 6. La difficulté est de trouver une solution particulière de (E). On verra des méthodes systématiques, le plus rapide étant toujours de deviner une solution (ou la forme d'une solution) simple.

Exemple 7. ✎ Trouver les solutions à valeurs réelles de $y' - 2y = \mathrm{e}^x$.

Proposition 3. Principe de superposition

Soit l'équation différentielle d'ordre n (E) : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_1 + f_2$, où $a_n, \ldots, a_0, f_1, f_2$ sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et où a_n ne s'annule pas.
Si y_1 est solution particulière de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_1$ et y_2 est solution particulière de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_2$, alors une solution particulière de (E) est $y_1 + y_2$.

Démonstration. On remplace $y_1 + y_2$ dans (E) en tenant compte des hypothèses sur y_1 et y_2. □

Remarque 7. ce « principe » (il s'agit en fait d'une proposition) permet de réduire la recherche d'une solution particulière d'une équation de second membre compliqué à des recherches de solutions particulières d'équations de seconds membres plus simples.

Exemple 8. ✎ Résoudre $y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$.

2. Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1

2.1 Cas particulier des recherches de primitives

Proposition 4. L'équation $y' = f(x)$ (dit *incomplète en y*), où f est une fonction continue sur un intervalle I, a pour solutions, à valeurs dans $\mathbb{K}$, les fonctions $y = F + c$ où F est une primitive de f sur I et c une constante dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. On a une équation scalaire linéaire d'ordre 1. Le théorème 2 de structure assure que les solutions sont de la forme $F + y_0$ ($F' = f$ est solution particulière) où y_0 vérifie l'équation homogène $y' = 0$. Or une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle : $y_0 = c \in \mathbb{K}$. □

Proposition 5 (Primitives à connaître). Dans ce qui suit $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et on donne une expression sur I de f et de ses primitives F (qui dépendent d'une constante K réelle).

① $f(x) = x^n$, $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + K$ $(n \neq -1)$.

② $f = u' u^n$, $F = \dfrac{1}{n+1} u^n + K$

③ $f = \dfrac{u'}{u}$, I un intervalle où u ne s'annule pas, $F = \ln |u| + K$.

④ $f = \dfrac{u'}{1 + u^2}$, $F = \arctan(u) + K$.

⑤ $f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, I un intervalle où $u > 0$, $F = 2\sqrt{u} + K$.

⑥ $f(x) = u(ax)$, $F(x) = \dfrac{1}{a}u(ax) + K$. $(a \neq 0)$

⑦ toutes les primitives des dérivées classiques !

Remarque 8. ⚠ le quotient, le produit de deux fonctions n'a pas pour primitive le quotient, le produit de leurs primitives. Il faut reconnaître des composées qui apparaissent dans les formules ci-dessus.

Exemple 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

① $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ② $\cos(x)y' = \sin(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ ③ $y' = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}$

2.2 Équations différentielles scalaires linéaires sans second membre d'ordre 1 : $y' + ay = 0$

Définition 7. Une *équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1* est de la forme $\alpha y' + \beta y = \gamma$ où α, β et γ sont des fonctions continues sur un intervalle I et α ne s'annule pas sur I.

Lorsque γ est la fonction nulle (second membre nul), l'équation est dite *sans second membre*.

Quitte à diviser par α, ces équations sont équivalentes à des équations de la forme $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur I.

Théorème 6. ÉDL1SSM

L'équation $y' + ay = 0$, où a est une fonction continue sur un intervalle I, admet comme solutions les

$$y : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$$

où A est une primitive de a sur I et $K \in \mathbb{R}$ est constante

Démonstration. Soit y une solution de $y' + ay = 0$. Définissons la fonction $z = y\mathrm{e}^A$ où A est une primitive de a sur I. On a $z' = y'\mathrm{e}^A + y \times A'\mathrm{e}^A = (y' + ay)\mathrm{e}^A = 0$ donc $z' = C \in \mathbb{R}$ est constante. Ainsi, $y = C\mathrm{e}^{-A}$.

Réciproquement, si $y = C\mathrm{e}^{-A}$, $y' = -aC\mathrm{e}^{-A} = -ay$ donc $y' + ay = 0$: y est bien solution de l'équation. □

Remarque 9. ⚠ attention au signe moins et à la nécessité de calculer une primitive A dans la formule.

Exemple 10. ✎ Résoudre : ① $y' = 2y$ et ② $(1+x^2)y' - y = 0$

2.3 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1 : $y' + ay = b$

Remarque 10. D'après le théorème 2 de structure des solutions d'équations différentielles linéaires, si y est une solution particulière de l'équation (E) : $y' + ay = b$, où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, les solutions de (E) sont de la forme $y + y_0$ avec y_0 solution de l'équation homogène (sans second membre) $y' + ay = 0$.

Exemple 11. ✎ Résoudre l'équation ④ de l'exemple 1 : $y' = x - y$. Résoudre $xy' + y = 1$ sur $]0\,;+\infty[$

2.4 Recherche de solutions particulières

Méthode 1. Variation de la constante

Pour trouver une solution particulière de $y' + ay = b$ (après avoir vérifié qu'il n'y en avait pas d'évidente), on pose $y = ky_0$ où k est une fonction définie sur I et y_0 est une solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$. On trouve $k'y_0 + ky_0' + aky_0 = b \iff k'y_0 = b$ et on en déduit k par une recherche de primitives.

Exemple 12. ✎ Résoudre $(\mathrm{e}^x + 1)y' - \mathrm{e}^x y = 2x(e^x + 1)^2$

Remarque 11. Le principe de superposition (proposition 3) s'applique aux équations (E) : $y' + ax = b_1 + b_2$: si y_1 vérifie $y' + ax = b_1$ et y_2 vérifie $y' + ax = b_2$, $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.1 Cas des équations sans second membre

Définition 8. Une *équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* est une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec a, b, c dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \neq 0$.

L'équation caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation de degré deux $ar^2 + br + c = 0$.

Proposition 7 (solutions à valeurs complexes). On considère l'équation $(E) : ay''+by'+cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E). Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes sont

- ⋆ si $\Delta \neq 0$, $x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ où α et β sont les racines distinctes de l'équation caractéristiques.
- ⋆ si $\Delta = 0$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où α est la racine double de l'équation caractéristique.

avec A, B des constantes complexes.

Démonstration. Soit α une racine de l'équation caractéristique. On cherche les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \varphi(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où φ est une fonction deux fois dérivable. En abrégé $y' = \varphi'\mathrm{e}^{\alpha x} + \varphi\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}$ et $y'' = \varphi''\mathrm{e}^{\alpha x} + 2\varphi'\alpha\mathrm{e}^{\alpha x} + \varphi''\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha x}$. D'où $0 = ay'' + by' + y = ((a\alpha^2 + b\alpha + c)\varphi + (2a\alpha + b)\varphi' + a\varphi'')\mathrm{e}^{\alpha x}$. Comme α vérifie l'équation caractéristique, cela équivaut à $0 = (2a\alpha + b)\varphi' + a\varphi''$, ou encore $\varphi'' + (2\alpha + \frac{b}{a})\varphi' = 0$ qui est une équation différentielle d'ordre 1 d'inconnue φ'.

Si $\Delta = 0$, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$, donc l'équation se réduit à $\varphi'' = 0$ d'où $\varphi' = A$ et $\varphi : x \mapsto Ax + B$.

Si $\Delta \neq 0$, on a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, donc $2\alpha + \frac{b}{a} = \alpha - \beta$. Ainsi, l'équation devient $\varphi'' + (\alpha - \beta)\varphi' = 0$. Les solutions de cette équation du premier ordre sont les $\varphi' : x \mapsto K\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)x}$ (K constante) d'où $\varphi : x \mapsto \frac{K}{\beta-\alpha}\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)x} + A$. En posant $B = \frac{K}{\beta-\alpha}$, on trouve $y : x \mapsto (A + B\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)x})\mathrm{e}^{\alpha x} = A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$. □

Théorème 8. Solutions à valeurs réelles

On considère l'équation $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E). Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de (E) sont :

- ⋆ si $\Delta > 0$, $x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ où α et β sont les racines distinctes de l'équation caractéristiques.
- ⋆ si $\Delta = 0$, $x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où α est la racine double de l'équation caractéristique.
- ⋆ si $\Delta < 0$, $x \mapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\mathrm{e}^{kx}$ où $k \pm \mathrm{i}\omega$ sont racines de l'équation caractéristique.

avec A, B des constantes réelles.

Démonstration. Si $\Delta \neq 0$, les solutions à valeurs complexes sont les $z : x \mapsto C\mathrm{e}^{\alpha x} + D\mathrm{e}^{\beta x}$ où $C, D \in \mathbb{C}$.

Or une solution y est à valeurs réelles lorsque $\bar{y} = y$, ou encore $C\mathrm{e}^{\alpha x} + D\mathrm{e}^{\beta x} = \bar{C}\mathrm{e}^{\bar{\alpha}x} + \bar{D}\mathrm{e}^{\bar{\beta}x}$.

Si $\Delta > 0$, alors α et β sont réels, d'où $C = \bar{C}$ et $D = \bar{D}$: on trouve la forme attendue avec $A = C$ et $B = D$ réels. Le cas $\Delta = 0$ est semblable.

Si $\Delta < 0$, en notant $\alpha = k + \mathrm{i}\omega$ ($k, \omega \in \mathbb{R}$), on obtient : $(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x})\mathrm{e}^{kx} = (\bar{C}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} + \bar{D}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x})\mathrm{e}^{kx}$. On en déduit $D = \bar{C}$, et on trouve la forme attendue en définissant les réels A et B par $D = \frac{A+\mathrm{i}B}{2}$, et en appliquant les formules d'Euler. □

Exemple 13. ✎ Solutions à valeurs réelles de ① $y'' - 2y' - 3y = 0$ ② $y'' + \omega^2 y = 0$ ③ $y'' + 2y' + y = 0$

3.2 Cas des équations avec second membre

Proposition 9.

On considère une solution y de $(E) : ay'' + by' + cy = f$ où a, b, c sont des constantes, $a \neq 0$ et f une fonction continue définie sur un intervalle I. Les solutions de (E) sont les $y + y_0$ où y_0 est solution de l'équation sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$

Méthode 2. Cas où le second membre est une exponentielle-polynôme

On suppose que le second membre est une fonction « exponentielle–polynôme » : de la forme $f(x) = P(x)e^{\gamma x}$, où P est un polynôme de degré n.
On recherche alors une solution y de la forme $x \mapsto x^m Q(x)e^{\gamma x}$ où

- ⋆ Q est un polynôme de degré n.
- ⋆ γ est le facteur dans l'exponentielle du second membre. (pas des solutions !)
- ⋆ m est la multiplicité de γ comme racine de l'équation caractéristique : $m = 0$ si γ n'est pas racine, $m = 1$ si γ est racine et $\Delta > 0$, et $m = 2$ si γ est racine et $\Delta = 0$.

Cette méthode inclut les cas où le second membre est un polynôme ($\gamma = 0$) ou une exponentielle ($\deg P = 0$).

Remarque 12. Le principe de superposition (proposition 3) des solutions s'applique : si y_1 est solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1$ et y_2 est solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_2$, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1 + f_2$.

Exemple 14. Déterminer les solutions à valeurs réelles de

① $y'' + y = x + 1$ ② $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ ③ $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} + 5e^{-x}$

Remarque 13. La même méthode s'applique pour les équations d'ordre 1 à coefficients constants.

Remarque 14. Lorsque le second membre fait intervenir des fonctions trigonométriques, on pourra utiliser les relations $\cos(t) = \Re e(e^{it})$, $\sin(t) = \Im m(e^{it})$ et obtenir une solution particulière à valeurs réelles comme partie réelle ou imaginaire d'une solution particulière à valeurs complexes.

Exemple 15. Résoudre $y' + y = \cos(x)$.

4. Exemples d'équations différentielles non linéaires

On peut exprimer les solutions de certaines équations non linéaires, la recherche de solutions passe par un changement de fonctions, méthode que l'on a pu mettre en œuvre dans la démonstration des théorèmes 6 et 8. Le changement opportun sera indiqué lors des exercices, les méthodes ne sont pas à connaître par cœur.

4.1 Équations de Bernoulli

Méthode 3. Équations de Bernoulli

On considère l'équation, dite *de Bernoulli*, $y'(x) = a(x)y + b(x)y^\alpha$ avec $\alpha \neq 0, 1$, a et b continues sur un intervalle I (contenu dans $\mathbb{R}_*^+$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$).
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et $y = 0$ est solution, dans ce cas aucune autre solution ne s'annule, soit $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, et y ne s'annule pas (car y^α ne serait pas définie). On cherche une solution qui ne s'annule pas, on divise les deux membres par y^α.
L'équation équivaut à $y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ dans laquelle on pose $z = y^{1-\alpha}$.

Exemple 16. ✎ Résoudre $xy' + xy + y^2 e^x = 0$

4.2 Équations homogènes

Méthode 4. Équations homogènes

L'équation est *homogène* lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $y' = f(\frac{y}{x})$. On reconnaît ces équations au fait qu'elles sont invariantes lorsqu'on remplace x et y par tx et ty. On les résout par le changement de variable $u = \frac{y}{x}$, qui permet d'obtenir une équation à variables séparées.

Exemple 17. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $2xyy' = y^2 - x^2$.

TD du § 7

Exercice 1. Équations linéaires d'ordre 1
Résoudre l'équation différentielle : $xy' - 2y = x^2 \ln(x)$.

Exercice 2. Équations linéaires d'ordre 1 ATS 2010
Résoudre l'équation différentielle : $x^2y' - xy = -x^4 - 1$.

Exercice 3. Équation linéaire d'ordre 1 avec second membre ATS 2003
Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = \ln x$.

Exercice 4. Équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants
Résoudre l'équation différentielle :
① $y'+y = \mathrm{e}^x$ ② $y'+y = \cos(2t)$ ③ $y'-y = t\mathrm{e}^t$. ④ $y'-y = t\mathrm{e}^{-t}$ ⑤ $y'-y = 2t\mathrm{ch}(t)$

Exercice 5. Équations linéaires d'ordre 1
Résoudre l'équation différentielle :
① $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ② $xy' + y = \mathrm{e}^x$ sur $]0;+\infty[$ ③ $y' + \tan(x)y = \cos^3(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 6. Problème de Cauchy du premier ordre
Résoudre

① $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ avec $y(0) = 2$.

② $(1-x)y' - (1+2x)y = 1 + 2x$ sur $]-1;1[$ avec $y(0) = 0$

Exercice 7. Équation linéaire d'ordre 2 à second membre trigonométrique ATS 2013
Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(3x)$.

Exercice 8. Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2
Résoudre l'équation différentielle :
① $y'' - 2y' + y = t^2 + \mathrm{e}^{2t}$ ② $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}$ ③ $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$ ④ $y'' + 3y' = x - 1$

Exercice 9. Problème de Cauchy du second ordre
Résoudre l'équation différentielle : $y''-3y'+2y = \mathrm{sh}(2x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

Exercice 10. Équation différentielle autonome
On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y^2$.

① Trouver une solution simple y_0 définie sur $\mathbb{R}$ de (E).

② Sans résoudre, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, démontrer que les autres solutions maximales sont de signe constant, et strictement croissantes.

③ Résoudre (E).

Exercice 11. Équation homogène
On souhaite obtenir l'allure des courbes intégrales de l'équation différentielle $(y-x)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

① On considère la fonction $t : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$. Exprimer y puis y' en fonction de t, puis donner une équation différentielle vérifiée par t.

② On reconnaît une équation à variables séparées : résoudre l'équation en exprimant x en fonction de t. En déduire y en fonction de t.

③ Pour C strictement positif fixé, étudier la courbe paramétrée par $(x(t);y(t))$
Représenter les trajectoires qui correspondent à plusieurs valeurs de C.

Exercice 12. Équations d'Euler

Soient $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et h une fonction continue sur I à valeurs réelles. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + axy' + by = h$.

① Par le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que résoudre l'équation (E) revient à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

② Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E') : $x^2y'' + 3xy' + 2y = 1 + x^2$.

③ Que doit-on changer pour obtenir les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$? Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}_-^*$.

④ L'équation (E') admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13. Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant à tout instant.

À l'instant $t = 0$, un professeur entre dans une salle de classe à 20^oC son gobelet de café chaud, à 80^oC. On note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t.

On rappelle que $\ln(2) \approx 0{,}7$ et $\ln(3) \approx 1{,}1$.

① Expliquer pourquoi il existe une constante positive k telle que $\theta'(t) = k(20 - \theta(t))$ pour tout $t \geqslant 0$.

② Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t et k.

③ Après deux minutes, le café est à une température de 60^oC. Donner une valeur approchée de k à 0,1.

④ À quel moment le professeur boira-t-il son café, qu'il aime consommer à une température de 40^oC ?

Exercice 14. Oscillateurs

Soient ω_0 (pulsation propre) et Q (facteur qualité) deux réels strictement positifs. On considère les équations différentielles : (P_0) : $y'' + \omega_0^2 y = 0$ et (A_0) : $y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$ avec conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.

① Oscillateur harmonique (facteur qualité infini). Résoudre (P_0). Que dire des solutions ?

② Oscillateur faiblement amorti. On suppose $Q > \frac{1}{2}$ et on note $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$ (temps de relaxation) et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (pseudo-fréquence). Résoudre (A_0).

③ Oscillateur fortement amorti. On suppose $Q < \frac{1}{2}$. Résoudre (A_0).

④ Relaxation critique. On suppose $Q = \frac{1}{2}$. Résoudre (A_0).

⑤ Application mécanique : on considère un objet de masse m fixé à l'extrémité d'un ressort (en position verticale) de raideur k, que l'on étire d'une certaine longueur et que l'on lâche. On repèrela position de la masse par son abscisse $x(t)$ repérée sur un axe vertical orienté vers le bas, d'origine le point d'attache du ressort. On note ℓ la longueur à vide du ressort et g la constante gravitationnelle. À l'instant $t = 0$ l'objet se situe à une hauteur x_0 et sa vitesse est nulle.

$\star$ S'il n'y a pas de frottements, montrer que x vérifie l'équation différentielle $\dfrac{m}{k}x'' + x = \dfrac{mg}{k} + \ell$.

Déterminer la pulsation propre et le facteur qualité en fonction de m, k, g et ℓ et une expression de $x(t)$.

$\star$ Si la masse est plongée dans un liquide qui provoque une force de frottement opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, de norme $\alpha x'$. (α est le coefficient de frottement), obtenir une équation différentielle satisfaite par x et décrire le type de mouvement en fonction de α, m, k, g, ℓ.

⑥ Application électrique : un condensateur de capacité électrique C, initialement chargé d'une charge q_0, commence à se décharger dans une bobine d'inductance L. On note q la charge électrique du condensateur en fonction du temps.

$\star$ résistance du circuit négligeable : montrer que q vérifie $q'' + \omega^2 q(t) = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Obtenir une expression de la charge q en fonction du temps.

$\star$ résistance du circuit R : montrer que la charge vérifie $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$. En déduire le type de régime en fonction de R, L et C.

⑦ Déterminer une solution de l'équation $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A e^{\mathrm{i}\omega t}$ vec $A > 0$ et $\omega > 0$.

Bilan du § 7

On abrège :

- ⋆ « équation différentielle linéaire d'ordre 1 » par EDL1
- ⋆ « équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants » par EDL2
- ⋆ « équation différentielle non linéaire » par EDNL

Prérequis

① §2 : Complexes : trigonométrie (formules d'Euler, section 7) .... ☐

② §3 : Fonctions usuelles : tout ! .... ☐

Objectifs prioritaires

① EDL1 .... ☐

- (a) savoir trouver des primitives simples (2.1) .... ☐
- (b) savoir résoudre une EDL1 sans second membre .... ☐
- (c) forme générale des solutions d'une EDL1 avec second membre : 2.2 et exemple 10 .... ☐
- (d) savoir trouver une solution particulière d'une EDL1 avec second membre : 2.3 .... ☐
  - i. en trouvant une solution particulière simple : exemple 11 .... ☐
  - ii. en utilisant la méthode de la variation de la constante (méthode 1 et exemple 12) .... ☐
  - iii. en utilisant le principe de superposition (proposition 3) .... ☐
- (e) savoir refaire les exercices 1, 2, 3, 4, 5 .... ☐

② EDL2 .... ☐

- (a) résolution d'EDL2 sans second membre si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (théorème 8) .... ☐
- (b) résolution d'EDL2 sans second membre si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (proposition 7) .... ☐
- (c) connaître la forme générale des solutions d'une EDL2 avec second membre .... ☐
- (d) solution particulière d'EDL2 avec second membre exponentielle-polynôme (méthode 2) .... ☐
- (e) savoir refaire les exercices 7 et 8 .... ☐

③ savoir résoudre un problème de Cauchy (trouver les constantes) : exemple 5 .... ☐

- (a) savoir refaire l'exercice 9 .... ☐

Objectifs secondaires

① savoir effectuer un changement de fonction indiqué pour résoudre une EDNL .... ☐

- (a) exercice 12 .... ☐

② connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 1 avec les hypothèses !) .... ☐

③ savoir résoudre une équation différentielle à variables séparées (1.3 et exercice 10) .... ☐

④ savoir représenter des courbes intégrales d'une équation différentielle .... ☐

Approfondissement

① Connaître les méthodes pour les EDLN de Bernoulli ou homogènes : paragraphe 4 .... ☐

② savoir représenter le champ de vecteurs d'une équation différentielle résolue en y' : 1.1 .... ☐