§ 6 : Géométrie spatiale

1. Géométrie euclidienne en dimension 3

1.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 1. L'*espace* réel $\mathcal{E}$ est un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est de dimension 3 :

① Il existe trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{\kappa}$ de E. Ces vecteurs forment une *base* de E.

② Quatre vecteurs quelconques de E sont toujours liés par une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls : $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x}) \in E^4$, $\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\} : \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}+\delta\vec{x} = \vec{o}$.

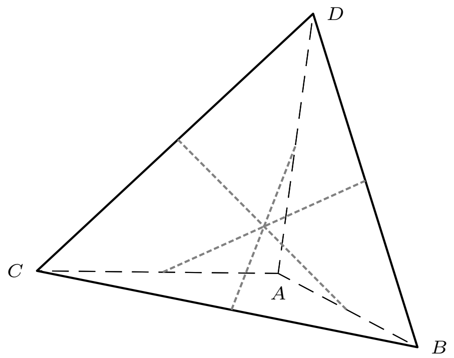
Remarque 1. Comme dans le plan, la donnée d'une base de l'espace $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$ permet de définir les coordonnées $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ d'un vecteur $\vec{u} \in E$, comme les seuls réels vérifiant : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{\kappa}$. Les nombres x, y et z s'appellent respectivement l'*abscisse*, l'*ordonnée* et la *cote* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

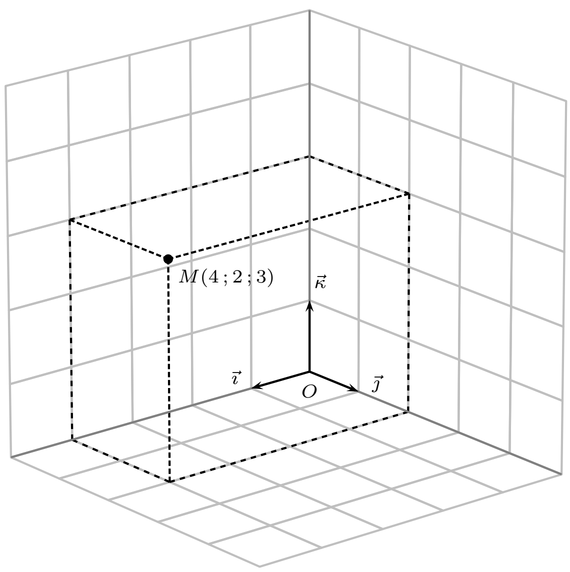
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$: une origine $O \in \mathcal{E}$ et une base de E, on définit de même les coordonnées du point M comme celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Remarque 2. Les formules de la géométrie affine du plan et des barycentres se généralisent donc à l'espace.

Par exemple : $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{matrix}\right.$; si M milieu de $[AB]$, $M\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$.

Exemple 1. ✎ Montrer que les médianes (les segments qui joignent les milieux des arêtes opposées) d'un tétraèdre se coupent en leurs milieux.

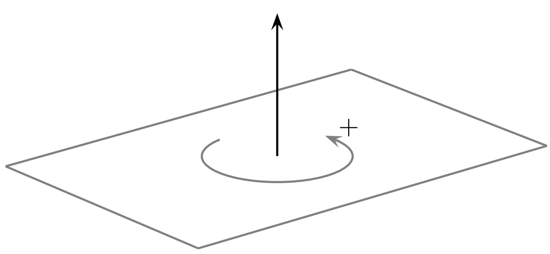




1.2 Orientation

Définition 2. La donnée d'un vecteur non contenu dans un plan vectoriel permet d'orienter le plan : le sens direct est le sens trigonométrique du point de vu de l'observateur situé à l'extrémité du vecteur extérieur.

Définition 3. Une base $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ est *directe* si $\sin(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) > 0$, dans le plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$, orienté par le vecteur $\vec{w}$.



1.3 Produit scalaire

Définition 4. On munit l'ensemble des vecteurs de l'espace E d'une norme en choisissant une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$ et en posant

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ où } \vec{u}(x\,;y\,;z)$$

La distance entre deux points A et B est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
Comme dans le plan, on définit le produit scalaire par $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

Définition 5. Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ est orthonormé si les vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Proposition 1. Propriétés du produit scalaire

Dans un repère orthonormé, les propriétés du produit scalaire de l'espace sont les mêmes que dans le plan.
① $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$ où $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{u}(x'\,;y'\,;z')$
② homogénéité : $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$.
③ bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ et $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$
④ symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
⑤ positivité : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$.
⑥ caractère défini : $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0$.
⑦ caractérisation de l'orthogonalité : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$
⑧ projeté orthogonal : soient A, B et C trois points avec $A \neq B, C$. Le projeté orthogonal H de B sur (AC) vérifie : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

1.4 Angles de vecteurs dans l'espace

Remarque 3. ⚠ La notion d'angle orienté n'a pas de sens dans l'espace : on ne peut pas orienter simultanément tous les plans.

En revanche $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (car $\|\vec{u}+t\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2t\vec{u}\cdot\vec{v} + t^2\|\vec{v}\|^2$ est un polynôme en t positif, donc de discriminant positif : $0 \leqslant \Delta = 4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$). Ainsi, on peut définir

Définition 6. Un angle de l'espace est défini par deux vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$, la mesure de l'angle est le nombre

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) \in [0\,;\pi]$$

La mesure est donc un nombre entre 0 et π (pas de « modulo 2π »), et ne dépend pas de l'ordre des vecteurs.

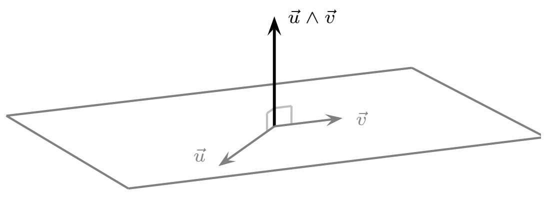
Proposition 2. En particulier, on retrouve la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.

2. Produit vectoriel

2.1 Définition et propriétés

Définition 7. Le *produit vectoriel* de deux vecteurs de l'espace non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ (ou parfois $\vec{u}\times\vec{v}$) tel que :
- ⋆ la norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\theta)$ où θ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- ⋆ la direction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- ⋆ le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u}\wedge\vec{v})$ soit direct.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{o}$.



Exemple 2. Dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$ orthonormée directe, calculer les 9 produits vectoriels obtenus avec deux couples ordonnés quelconques de vecteurs de la base.

Proposition 3.

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, et λ un réel.

① homogénéité : $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$.

② bilinéarité : $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$

③ antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

④ caractérisation de la colinéarité : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

Démonstration. L'antisymétrie vient de la définition du sens du produit vectoriel, l'homogénéité et la linéarité par rapport à une variable vient de ce que $\vec{v} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est linéaire comme la composée de trois applications linéaires : la projection sur le plan orthogonal à $\vec{u}$, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{u}$ et l'homothétie de rapport $\|\vec{u}\|$. L'homogénéité et linéarité en la première variable se déduisent de l'antisymétrie. ☐

Proposition 4. Formule en coordonnées cartésiennes

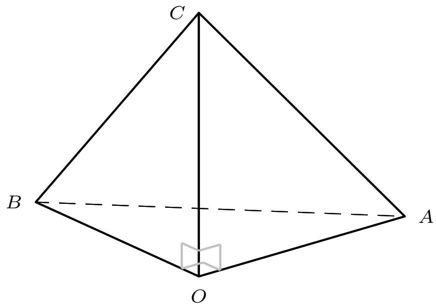
Soient $\vec{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right.$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\left|\begin{matrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{matrix}\right.$ ou encore $\vec{u} \wedge \vec{v}\left|\begin{matrix} +\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{matrix}\right.$

Démonstration. Repose sur la bilinéarité de la proposition 3 et l'exemple 2. ☐

Remarque 4. ⚠ : le produit vectoriel n'est pas associatif : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Remarque 5. Comme $|\det(\vec{u}\,;\vec{v})| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ (déterminant pris dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.
L'aire du triangle ABD est la moitié de l'aire précédente.

Exemple 3. Montrer que dans un tétraèdre trirectangle, la somme des carrés des aires des faces des angles droits égale le carré de l'aire de la quatrième face.



3. Produit mixte

Définition 8. Le *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace muni d'un repère orthonormé direct est le nombre

$$[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}] = \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Proposition 5.

Soient $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{w}$ et e trois vecteurs de l'espace, λ un réel.

① homogénéité : $\lambda \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\lambda\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{u}\,;\lambda\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\lambda\vec{w})$

② trilinéarité : $\det(\vec{u} + \vec{e}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \det(\vec{e}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$, idem pour les deux autres variables.

③ alterné : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{w}\,;\vec{v}\,;\vec{u}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{w}\,;\vec{v})$

④ caractérisation de la coplanarité : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Démonstration. se déduit des propriétés du produit scalaire et du produit mixte. ☐

Proposition 6. Dans un repère orthonormé direct, si

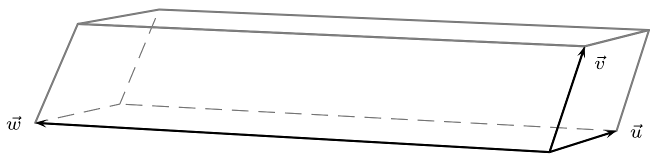
$$\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \ ; \ \vec{v}\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix} \ ; \ \vec{w}\begin{vmatrix}x''\\y''\\z''\end{vmatrix} \text{ on a : } \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - zy'x'' - yx'z''$$

Démonstration. Appliquer la définition, et les formules en coordonnées des produits scalaire et vectoriel. □

Remarque 6. Le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a un volume de

$$\mathcal{V}_P = |\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|.$$

Le tétraèdre construit à partir des mêmes vecteurs a comme volume : $\mathcal{V}_T = \dfrac{1}{6}|\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|$.



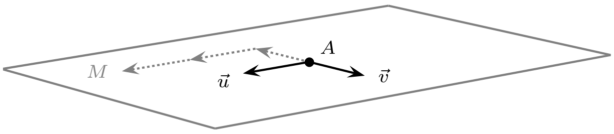
4. Plans

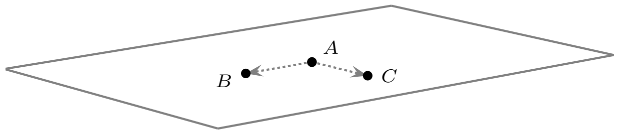
4.1 Système d'équations paramétrique d'un plan

Définition 9. Le *plan affine* $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ passant par le point A et dirigé par les vecteurs (non colinéaires) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $M = A + t\,\vec{u} + t'\,\vec{v}$ avec $(t, t') \in \mathbb{R}$. Cela signifie que les coordonnées de M vérifient un système d'équations paramétriques :

$$M(x\,;y\,;z) \in (A\,;\vec{u}\,;\vec{v}) \iff \begin{cases} x = x_A + t\,x_{\vec{u}} + t'\,x_{\vec{v}} \\ y = y_A + t\,y_{\vec{u}} + t'\,y_{\vec{v}} \\ z = z_A + t\,z_{\vec{u}} + t'\,z_{\vec{v}} \end{cases} \qquad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Cela revient enfin à dire que c'est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient coplanaires.



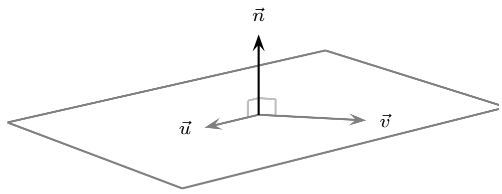


Remarque 7. Trois points non alignés définissent le plan $(ABC) = (A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

On obtient trois points non alignés d'un plan à partir d'un système d'équations paramétriques en fixant par exemple $(t\,;t') = (0\,;0)$, $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$.

4.2 Équation cartésienne d'un plan

Définition 10. Un vecteur $\vec{n}$ non nul est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur formé de deux points de $\mathcal{P}$. Il suffit pour cela qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.



Proposition 7. Équation de plan

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ est un plan, de vecteur normal $\vec{n}$. Les points $M(x\,;y\,;z)$ vérifient une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, appelée *équation cartésienne* du plan.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c non tous nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Démonstration. $M(x\,;y\,;z)$ vérifie $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$, si et seulement si $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, ce qui équivaut à $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Si $a \neq 0$ (le même raisonnement peut être tenu pour b ou c), cela équivaut à $x = x_A - \frac{b}{a}t - \frac{c}{a}t'$, $y = y_A + t$ et $z = z_A + t'$, qui est un système d'équations paramétriques d'un plan.

Réciproquement, en considérant $A(-\frac{da}{a^2+b^2+c^2}\,; -\frac{db}{a^2+b^2+c^2}\,; -\frac{dc}{a^2+b^2+c^2})$, on constate que l'ensemble des points vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$. □

Remarque 8. ⚠ cette équation ressemble aux équations de droites de la géométrie plane, mais une droite de l'espace est décrite par deux équations cartésiennes.

Remarque 9. On obtient un point du plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ en choisissant arbitrairement deux coordonnées (de sorte que le coefficient de la troisième soit non nul) et en calculant la troisième.

Remarque 10. Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux colinéaires, perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Méthode 1. Obtenir une équation cartésienne de plan

Pour obtenir une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ ...

① dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ et un point A :
- ⋆ on écrit $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- ⋆ ou que $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \iff ax+by+cz+d=0$, et on utilise A pour trouver d.

② dont on connaît deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A :
- ⋆ on utilise la méthode précédente, sachant qu'un vecteur normal est $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- ⋆ on écrit $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{AM}) = 0$.
- ⋆ on forme le système d'équations paramétriques et on élimine t et t' dans l'une des équations.

③ dont on connaît trois points non alignés A, B, C : on utilise ②, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exemple 4. ✎ Soient $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ et $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$.

Trouver une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$, du plan (ABC), du plan perpendiculaire à (ABC) et à $\mathcal{P}$ passant par C, du plan médiateur de $[AB]$.

Méthode 2. Obtenir des vecteurs directeurs et un point

On obtient deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A d'un plan $\mathcal{P}$ dont on connaît ...

① un système d'équations paramétriques : les coordonnées de A s'obtiennent pour $t=0$ et $t'=0$, celles de $\vec{u}$ sont les coefficients de t, celles de $\vec{v}$ les coefficients de t'.

② $A, \vec{u}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ en posant $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$.

③ deux points A, B et un vecteur normal $\vec{n}$ en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$.

④ une équation $ax+by+cz+d=0$
- ⋆ en obtenant deux points distincts A, B, le vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ et en utilisant ③.
- ⋆ en choisissant une coordonnées de coefficient non nul et en choisissant les deux autres comme paramètres, afin de construire un système paramétrique du plan.

Exemple 5. ✎ Donner deux vecteurs directeurs et un point du plan d'équation $x-z+1=0$.

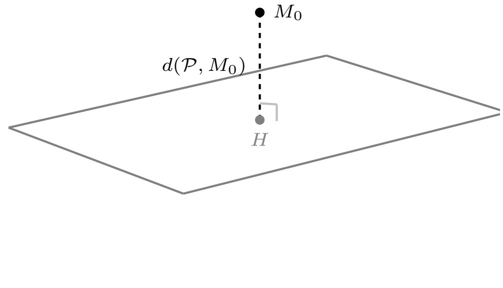
4.3 Distance d'un plan à un point

Proposition 8. Distance plan – point

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ (avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$) et $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$. La distance de $\mathcal{P}$ à M_0 est la distance de M_0 à son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. Elle vaut :

$$\boxed{d(\mathcal{P}, M_0) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Démonstration. Même principe que pour la distance point-droite de la géométrie plane. □



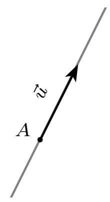
5. Droites

5.1 Définitions

Définition 11. Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble

$$\mathcal{D} = (A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u},\ t \in \mathbb{R}\} = \{A + t\,\vec{u} : t \in \mathbb{R}\}$$

est la *droite* passant par A de *vecteur directeur* $\vec{u}$.
Si A et B sont deux points distincts du plan, la *droite* (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.



Remarque 11. La droite $(A, \vec{u})$ est l'ensemble des $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = x_A + t\,x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\,y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\,z_{\vec{u}} \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$

Définition 12. Deux droites de vecteurs directeurs colinéaires sont parallèles.

Deux droites de vecteurs directeurs orthogonaux sont *orthogonales*. Si, en outre, elles sont sécantes, on dit qu'elles sont *perpendiculaires*.

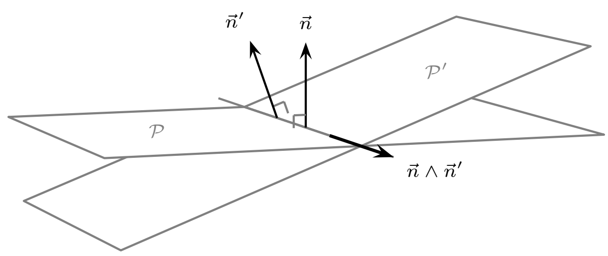
5.2 Équations cartésiennes de droites

Proposition 9. Position relative de deux plans

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, sont dans une et une seule de ces situations :

- ⋆ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont d'intersection vide : il sont strictement parallèles et $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{o}$.
- ⋆ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus, et $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{o}$.
- ⋆ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent suivant une droite dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{o}$

Démonstration. Si $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{o}$, les deux plans ont des vecteurs normaux colinéaires, donc les mêmes vecteurs directeurs : il suffit qu'ils aient un point commun pour être confondus : on est dans l'une des deux premières situation.
Si $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{o}$, il existe deux vecteurs directeurs, $\vec{v}$ de $\mathcal{P}'$, et $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, tel que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non coplanaires. Si $A \in \mathcal{P}$ et $A' \in \mathcal{P}'$, il existe donc x, y, z réels tels que $\overrightarrow{AA'} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.



Mais alors, $A + x\vec{u} + y\vec{v} = A' - z\vec{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Comme $\vec{w}$ dirigeant les deux plans, la droite $(A + \vec{w})$ est contenue dans leur intersection. Elle l'égale, sinon les plans contiendraient trois points non alignés et seraient égaux ($\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{o}$).

Définition 13. Un système d'*équations cartésiennes* d'une droite est formé d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ de deux plans non parallèles contenant cette droite.

Méthode 3. Systèmes paramétriques et cartésiens

À partir de deux plans non parallèles, on obtient les informations suivantes sur la droite d'intersection :

① un système d'équations cartésiennes formé d'un équation cartésienne de chacun des plans.

② un système d'équations paramétriques à partir d'un point d'intersection (obtenu en choisissant une coordonnée et calculant les autres avec les équations cartésiennes), et un vecteur directeur, produit vectoriel d'un vecteur normal de chacun des plans.

③ ou un système d'équations paramétriques en choisissant une inconnue comme paramètre dans les équations cartésiennes.

Exemple 6. ✎ Déterminer les intersections $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \cap P_3$ et $\mathcal{P}_3 \cap P_2$:
① $\mathcal{P}_1 : 4x - 2z + 1 = 0$ ② $\mathcal{P}_2 : z = 2x$ ③ $\mathcal{P}_3 : x + y + z = 1$.

Exemple 7. ✎ Démontrer et illustrer le théorème du toit : soient deux plans sécants, chacun contenant une droite. Si les deux droites sont parallèles, l'intersection des deux plans est parallèle à ces droites.

5.3 Distance point - droite

Proposition 10. Distance droite – point

Soit une droite $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et M un point du plan. Alors : $\boxed{d(\mathcal{D},M)=\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}}$

Démonstration. La distance est MH ou H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Dans le triangle MAH rectangle en H, $MH=AH\sin(\widehat{\overrightarrow{AH}\,;\overrightarrow{AM}})=AH\sin(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}})=\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}$. □

5.4 Distance droite - droite

Proposition 11. Deux droite $\mathcal{D}=(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}'=(A',\vec{u}\,')$ sont dans une seule des quatre situations suivantes :

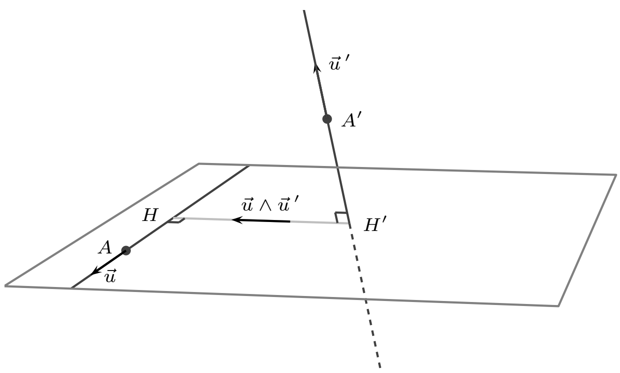
- ⋆ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ confondues (parallèles : $\vec{u}\wedge\vec{u}\,'=\vec{o}$, donc coplanaires : $\det(\vec{u}\,;\vec{u}\,';\overrightarrow{AA'})=0$ et $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\mathcal{D}=\mathcal{D}'$).
- ⋆ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ strictement parallèles (parallèles : $\vec{u}\wedge\vec{u}\,'=\vec{o}$, coplanaires : $\det(\vec{u}\,;\vec{u}\,';\overrightarrow{AA'})=0$ et $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\varnothing$).
- ⋆ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes (non parallèles : $\vec{u}\wedge\vec{u}\,'\neq\vec{o}$, coplanaires : $\det(\vec{u}\,;\vec{u}\,';\overrightarrow{AA'})=0$ et $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\{1\text{ point}\}$).
- ⋆ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires ($\det(\vec{u}\,;\vec{u}\,';\overrightarrow{AA'})\neq 0$, donc non parallèles : $\vec{u}\wedge\vec{u}\,'\neq\vec{o}$, et $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\varnothing$).

Proposition 12. Distance droite – droite

Deux droites non parallèles $\mathcal{D}=(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}'=(A,\vec{u}')$ possèdent exactement une perpendiculaire commune : l'intersection des plans $(A,\vec{u},\vec{u}\wedge\vec{u}')$ $(A',\vec{u}',\vec{u}\wedge\vec{u}')$.
La distance (plus petite distance entre un point de l'une et un point de l'autre) entre ces deux droites non parallèles est

$$\boxed{d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=\frac{\left|(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\|}}$$

Démonstration. Les plans sont bien définis ($\vec{u}\wedge\vec{u}'\neq\vec{o}$ car les droites sont non parallèles, et ce vecteur n'est ni colinéaire à $\vec{u}$, ni à $\vec{u}'$), et sécants ($\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{u}\wedge\vec{u}'$ sont non coplanaires). La droite d'intersection est dirigée par $\vec{u}\wedge\vec{u}'$ (direction commune aux deux plans), donc orthogonale à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Comme elle est coplanaire à chacune des droites, elle coupe perpendiculairement $\mathcal{D}$ en H et $\mathcal{D}'$ en H'.
Réciproquement, une perpendiculaire commune appartient à ces deux plans.
L'inégalité triangulaire assure que la distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est atteinte en HH'. Et :



$(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot\overrightarrow{AA'}=(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{H'A'})=(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot\overrightarrow{AH}+(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot\overrightarrow{HH'}+(\vec{u}\wedge\vec{u}')\cdot\overrightarrow{H'A'}=0\pm HH'\,\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\|+0$
d'où la formule de la distance, en prenant la valeur absolue puis en divisant par $\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\|$. □

Remarque 12. Si deux droites sont parallèles, elles ont une infinité de perpendiculaires communes. Leur distance est atteinte en les points d'intersection des droites et d'un plan perpendiculaire aux deux droites.

6. Sphères

Définition 14. La *sphère* de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $AM = r$.

La *boule ouverte* de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $AM < r$.

La *boule fermée* de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $AM \leqslant r$.

Remarque 13. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à la sphère de centre A et rayon r si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$.

Remarque 14. Le volume d'une sphère de rayon r est $\mathcal{V}_S = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple 8. Soit $\Omega(1\,;1\,;1)$. Déterminer, en fonction de d, la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan d'équation $x + y + z + d = 0$ avec la sphère de centre Ω et de rayon 1.

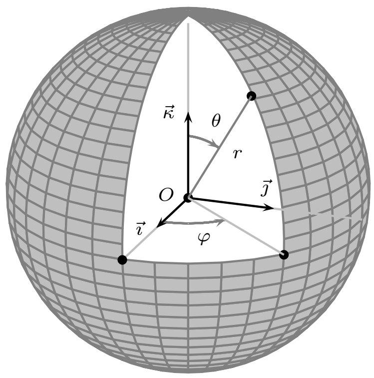
7. Coordonnées sphériques et cylindriques

7.1 Coordonnées sphériques

Définition 15. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$, on considère $M(x\,;y\,;z)$. La distance $r = OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}^+$ est le *rayon sphérique* de M, $\theta = \arccos(z/r) = (\vec{\kappa}\,;\overrightarrow{OM})$ est la *colatitude* de M, et $\varphi = (\vec{\imath};\overrightarrow{OM'})$ (où M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy)) la *longitude* du point M.

Les *coordonnées sphériques* de M sont (r, θ, φ).

Remarque 15. On a : $\begin{cases} x = r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$

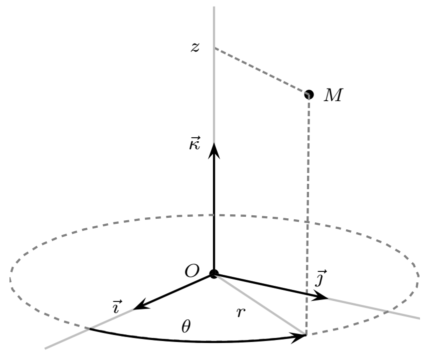


Remarque 16. On peut travailler avec la *latitude* $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ au lieu de la colatitude. Cela revient à remplacer les $\cos\theta$ par $\sin\phi$ et $\sin\theta$ par $\cos\phi$ dans les formules précédentes.

Remarque 17. La forme normale de l'équation d'un plan est obtenue en divisant l'équation $ax+by+cz+d = 0$ par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et en présentant les coordonnées $(a'\,;b'\,;c')$ du vecteur normal unitaire obtenu en coordonnées sphériques : $\cos(\varphi)\sin(\theta)x + \sin(\varphi)\sin(\theta)y + \cos(\theta)z + d' = 0$. La distance du plan à l'origine est alors donnée par $|d'|$.

7.2 Coordonnées cylindriques

Définition 16. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$, on considère $M(x\,;y\,;z)$. Les coordonnées cylindriques de M sont les trois nombres (r, θ, z) où $[r, \theta]$ sont des coordonnées polaires, dans le plan (Oxy) orienté par $\vec{\kappa}$, du projeté orthogonal de M sur (Oxy).



Remarque 18. On a : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$

TD du § 6

Exercice 1. Identité de Lagrange et application

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

① Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace : $\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{\imath})\,\vec{\imath} + (\vec{u}\cdot\vec{\jmath})\,\vec{\jmath} + (\vec{u}\cdot\vec{\kappa})\,\vec{\kappa}$.

② Démontrer l'identité de Lagrange : pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$.

③ Montrer que si le vecteur $\vec{u}$ est unitaire, $\|\vec{u}\wedge\vec{\imath}\|^2 + \|\vec{u}\wedge\vec{\jmath}\|^2 + \|\vec{u}\wedge\vec{\kappa}\|^2 = 2$.

En déduire que l'un des réels $\|\vec{u}\wedge\vec{\imath}\|$, $\|\vec{u}\wedge\vec{\jmath}\|$, $\|\vec{u}\wedge\vec{\kappa}\|$, au moins est supérieur ou égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 2. Équations de plans

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Trouver une équation du plan

① de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2+s+2t \\ y = 2+2s+t \\ z = 1-s-t \end{cases} \quad (t\,;s)\in\mathbb{R}^2$.

② parallèle à l'axe (Ox) passant par les points $A(0\,;1\,;2)$ et $B(2\,;-1\,;0)$

③ (ABC) où $A(1\,;2\,;3)$, $B(0\,;-1\,;1)$ et $C(2\,;2\,;2)$

④ médiateur du segment $[AB]$, où $A(0\,;1\,;2)$ et $B(2\,;-1\,;0)$

⑤ $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $A(-1\,;2\,;3)$, $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(0\,;1\,;4)$

⑥ contenant $\mathcal{D} : \begin{cases} 3x-y+z = 1 \\ x-4y+z = 2 \end{cases}$, et parallèle à $\mathcal{D}' : \begin{cases} x+y+z = 4 \\ 2x-y+z = 2 \end{cases}$

⑦ passant par $A(-1\,;2\,;3)$ et parallèle au plan d'équation $3x+y-z=0$.

⑧ passant par $A(1\,;1\,;1)$ et orthogonal à $\vec{u}(3\,;-1\,;2)$

Exercice 3. Plans parallèles aux axes

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Montrer qu'un plan parallèle à (Ox) a une équation de la forme $by+cz+d=0$.

Quelle forme ont les équations d'un plan parallèle à (Oz) ? À (Oxy) ? Donner l'équation du plan (Oxz).

Exercice 4. Configurations et intersection

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Décrire la configuration, et le cas échéant, l'intersection

① des droites $\mathcal{D} = (A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = (B,\vec{v})$ où : $A(2\,;0\,;1)$, $\vec{u}(1\,;-1\,;2)$, $B(-1\,;1\,;1)$, $\vec{v}(2\,;-1\,;1)$.

② des droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 6+2t \\ z = 4-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 8+5t \\ y = 2-2t \\ z = 6+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

③ de la sphère S de centre $\Omega(1\,;-3;\,1)$ et de rayon 3, et des deux plans d'équations $\mathcal{P} : x+y-3z=-3$, $\mathcal{Q} : 2x+2z+2=y$

④ de la sphère de centre O et de rayon 2, et la droite D_λ dirigée par $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ passant par $A(1\,;\lambda\,;0)$.

Exercice 5. Équations cartésiennes de droites

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Établir un système d'équations cartésiennes de la droite

① passant par $A(-1\,;2\,;3)$ et dirigée par $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$.

② (AB) où $A(-1\,;2\,;3)$ et $B(2\,;-1\,;4)$

③ passant par $A(-1\,;2\,;3)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} 3x+y-z+2 = 0 \\ x-y+z-4 = 0 \end{cases}$

④ perpendiculaire commune à $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y+3z=-4 \\ 2x-z=-1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x-z=-1 \\ y-z=-1 \end{cases}$

Exercice 6. Plans bissecteurs de deux plans

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Déterminer l'ensemble des points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $6x-2y-3z+2=0$. Que remarque-t-on ?

Exercice 7. Distance d'un point à l'intersection de deux plans orthogonaux
L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans perpendiculaires, qui se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$.

Montrer que pour tout point M de l'espace, on a : $d(\mathcal{D},M)^2 = d(\mathcal{P}_1,M)^2 + d(\mathcal{P}_2,M)^2$.

Exercice 8. Tétraèdres orthocentriques
L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

On appelle tétraèdre orthocentrique un tétraèdre dont les quatre hauteurs (perpendiculaires au plan d'une face passant par le sommet opposé) sont concourantes.

On considère un tétraèdre $ABCD$ (les quatre sommets sont non coplanaires).

① Démontrer que pour tous points A, B, C et D de l'espace, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.
En déduire que la troisième paire d'arêtes opposées, d'un tétraèdre qui possède deux paires d'arêtes opposées orthogonales, est orthogonale.

② Montrer que si la hauteur issue de A et la hauteur issue de B se coupent en un point H, alors les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales. En déduire que les paires d'arêtes opposées d'un tétraèdre orthocentrique sont orthogonales.

③ Montrer que si (AB) et (CD) sont orthogonales, les hauteurs issues de A et de B sont coplanaires et se coupent en un point H.
Montrer que si, en outre (AC) et (BD) sont orthogonales, H est l'orthocentre du tétraèdre $ABCD$.
En conclure qu'un tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique si et seulement s'il a deux paires d'arêtes opposées orthogonales.

④ Montrer que pour tous points A, B, C et D de l'espace, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
En déduire qu'un tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique si et seulement si $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

⑤ Montrer que les tétraèdre trirectangles et les tétraèdre réguliers sont orthocentriques.

Exercice 9. Torseurs
L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{\kappa})$.

Un torseur de l'espace est une application qui a tout point M de l'espace associe un vecteur $\vec{\Gamma}(M)$ de l'espace, telle que

$$\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2,\ \vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\vec{R}$ est la résultante de $\vec{\Gamma}$.

① Montrer que si $\vec{R}'$ est une résultante de $\vec{\Gamma}$, alors $\vec{R} = \vec{R}'$: la résultante est unique.

② Exemple. Soit $\vec{u}\in E$. Montrer que l'application $\mathcal{E}\to E,\ M\mapsto\vec{u}$ est un torseur. (appelé couple)

③ Exemple. Soit $R\in E$. Montrer que l'application $\mathcal{E}\to E,\ M\mapsto\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{OM}$ est un torseur.

④ Montrer qu'il existe un unique torseur $\vec{\Gamma}$ de résultante $\vec{R}\in E$ et tel que $\vec{\Gamma}(A) = \vec{u}$ (on dit que le moment au point A vaut $\vec{u}$). Ce torseur est noté ${}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{u}\end{array}\right\}$

⑤ Équiprojectivité : Soit $\vec{\Gamma}$ un torseur. Montrer que $\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2,\ \vec{\Gamma}(A)\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{\Gamma}(B)\cdot\overrightarrow{AB}$.

⑥ Somme de deux torseurs : prouver ${}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{u}\end{array}\right\} + {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}'\\ \vec{u}'\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}+\vec{R}'\\ \vec{u}+\vec{u}'\end{array}\right\}$

⑦ On dit qu'un point M est central pour un torseur $\vec{\Gamma}$ lorsque $\vec{\Gamma}(M)$ et la résultante sont colinéaires. Montrer que l'ensemble des points centraux, lorsque la résultante est non nulle, est une droite dirigée par $\vec{R}$. On l'appelle l'axe central du torseur.

⑧ Un torseur est un glisseur si et seulement s'il a un point de moment nul. Montrer que dans ce cas, soit il s'agit du torseur nul, soit la résultante est non nulle et moment est nul sur l'axe central.

⑨ Soit $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}'$ deux torseurs de résultantes $\vec{R}$ et $\vec{R}'$. Montrer que $\vec{R}\cdot\vec{\Gamma}'(M) + \vec{R}'\cdot\vec{\Gamma}(M)$ est constant. Ce nombre est le coproduit des deux torseurs. Montrer que le coproduit d'un torseur avec lui même est nul si et seulement si le torseur est un glisseur.

Bilan du § 6

Prérequis

① §4 Géométrie du plan : produit scalaire, déterminant ☐
② §4 Géométrie du plan : équation cartésienne et système d'équations paramétriques de droites ☐
③ §4 Géométrie du plan : équations de cercles ☐

Objectifs prioritaires

① savoir reconnaître un repère direct, orienter un plan (paragraphe 1.2) ☐
② savoir utiliser le produit scalaire dans l'espace (paragraphe 1.3) ☐
③ savoir utiliser le produit vectoriel dans l'espace (paragraphe 2) ☐
④ savoir utiliser le produit mixte dans l'espace (paragraphe 3) ☐
⑤ savoir travailler avec les plans de l'espace (paragraphe 4) ☐
  (a) savoir déterminer l'équation d'un plan (exercice 2, méthode 1) ☐
  (b) savoir trouver une base et un point d'un plan (méthode 2, exercice 6) ☐
  (c) savoir la formule de la distance point-plan (proposition 8) ☐
⑥ savoir travailler avec les droites de l'espace (paragraphe 5) ☐
  (a) savoir déterminer des équations cartésiennes d'une droite (exercice 5, méthode 3) ☐

Objectifs secondaires

① savoir trouver les éléments caractéristiques d'une sphère (paragraphe 6) ☐
② connaître les coordonnées sphériques (paragraphe 7.1) ☐
③ connaître les coordonnées cylindriques (paragraphe 7.2) ☐
④ savoir la formule de la distance droite-droite (proposition 11) ☐
⑤ savoir la formule de la distance point-droite (proposition 10) ☐

Approfondissement

① Torseurs : exercice 9 ☐