§ 5 : Courbes paramétrées

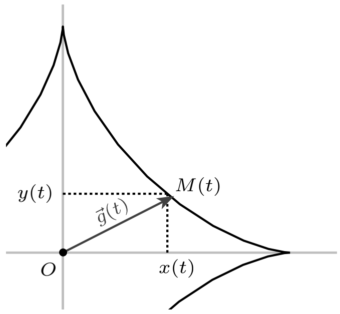
1. Notion de courbe paramétrée

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1.1 Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Définition 1. Une *fonction vectorielle* est de la forme $\vec{g} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
En particulier, une fonction vectorielle du plan est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on note $x(t)$ l'abscisse et $y(t)$ l'ordonnée de $\vec{g}(t)$.
Les fonctions $x : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)$ et $y : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t)$ sont les *fonctions coordonnées* de la fonction vectorielle $\vec{g}$.

Définition 2. Soit $\vec{g} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle du plan.
L'ensemble $\Gamma = \{M(x(t)\,;y(t)) : t \in \mathcal{D}\}$ est la *courbe paramétrée* par $\vec{g}$.
On dit encore que Γ est le *support* de $\vec{g}$, et que $\vec{g}$ est un paramétrage de Γ.

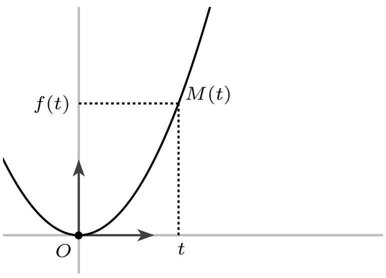


Remarque 1. On omettra souvent la flèche dans l'écriture d'une fonction vectorielle, écrivant g au lieu de $\vec{g}$.

Exemple 1. On connaît déjà les courbes paramétrées suivantes :

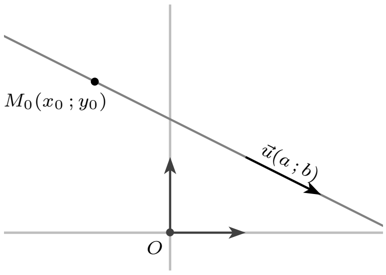
Courbe d'une fonction f

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{array}\right.$$



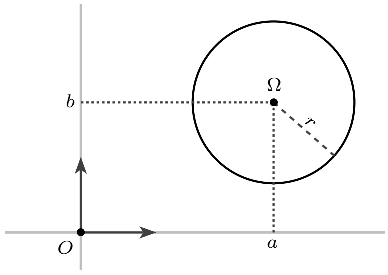
Droite

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = x_0 + a\,t \\ y(t) = y_0 + b\,t \end{array}\right.$$



Cercle

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{array}\right.$$



Remarque 2. ⚠ comme dans le cas des droites, deux paramétrages différents peuvent avoir un même support.

1.2 Fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 3. Soit $\vec{g}$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle I. Soit t_0 un réel de I ou une borne de I (éventuellement infinie). On définit la limite de $\vec{g}(t)$ lorsque t tend vers t_0 par

$$\lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{u} \iff \lim_{t\to t_0} \|\vec{g}(t) - \vec{u}\| = 0.$$

On note que la limite de $\vec{g}$ ne peut être « infinie » : on n'a pas donné de sens à cette notion dans le plan.

On définit la continuité et dérivabilité d'une fonction vectorielle en terme de limite, comme pour une fonction à valeurs réelles.

Définition 4. On appelle fonction (vectorielle ou réelle) de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle sur I, où $k \in \mathbb{N}^*$, une fonction k fois dérivable sur l'intervalle I, et dont la dérivée d'ordre k est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I à valeurs dans J.

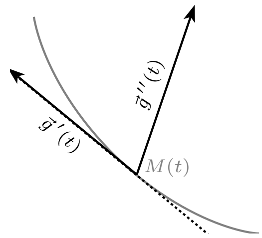
Une fonction est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur cet intervalle, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Une fonction est de *classe* $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle lorsqu'elle est continue sur cet intervalle.

Remarque 3. ⚠ f de classe $\mathcal{C}^1 \implies f$ dérivable, mais la réciproque est fausse si f' n'est pas continue.

Remarque 4. Les limites, la continuité, la dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^k$, s'étudient coordonnées par coordonnées :

$$\lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{u}(x_{\vec{u}}\,; y_{\vec{u}}) \iff \lim_{t\to t_0} x(t) = x_{\vec{u}} \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t\to t_0} y(t) = y_{\vec{u}} \in \mathbb{R}.$$

1.3 Vecteur vitesse, vecteur accélération



Définition 5. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et $\vec{g}$ une fonction vectorielle définie sur I et dérivable en t_0. Pour $t \in I$, on note $M(t)$ le point tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g}(t)$.
Le vecteur $\vec{g}\,'(t_0)$ est appelé *vecteur vitesse* de $\vec{g}$ en t_0.
Si le vecteur vitesse $\vec{g}\,'(t_0)$ est nul, le point $M(t_0)$ est *stationnaire*, ou singulier. Sinon, il est dit *régulier*.
Si $\vec{g}$ est deux fois dérivable en t_0, $\vec{g}\,''(t_0)$ est le *vecteur accélération* de $\vec{g}$ en t_0.

Exemple 2. ✎ Dans le cas du cercle, exemple 1, donner une expression du vecteur vitesse $\vec{g}\,'(t)$ et du vecteur accélération $\vec{g}\,''(t)$ au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Vérifier que $\vec{g}\,'(t) \perp \vec{g}\,''(t)$, que $t \mapsto \|\vec{g}\,'(t)\|$ est constante, et que $\vec{g}\,''(t)$ est colinéaire et de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}(t)$.

Remarque 5. En cinétique, une fonction vectorielle s'interprète comme le vecteur position d'un point mobile en fonction du paramètre temporel, la courbe étant la trajectoire de ce point. Cette interprétation justifie la terminologie de vecteurs vitesse et accélération.

Le mouvement est uniforme lorsque $t \mapsto \|\vec{g}\,'(t)\|$ est constante, et rectiligne si le support est une droite.

Définition 6. Soit $\vec{g}$ une fonction vectorielle, dérivable en t_0. On note M le point du support de paramètre t_0. Si M est régulier, la *tangente* au support en M est la droite passant par M dirigée par $\vec{g}\,'(t_0)$.

Si le point M est stationnaire, et si

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = a,$$

cette limite a est le coefficient directeur de la tangente en M. Si la limite est infinie, la courbe admet une tangente verticale en M.

1.4 Dérivées remarquables

Proposition 1. Soit $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$ deux fonctions vectorielles dérivables sur un intervalle I, et λ une fonction dérivable sur I. Les fonctions suivantes sont dérivables sur I :

① $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda(t)\,\vec{g}_1(t)$ et $\forall t \in I,\ (\lambda\vec{g}_1)'(t) = \lambda'(t)\vec{g}_1(t) + \lambda(t)\vec{g}_1\,'(t)$.

② $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t))$ et $\forall t \in I,\ (\det(\vec{g}_1, \vec{g}_2))'(t) = \det(\vec{g}_1\,'(t), \vec{g}_2(t)) + \det(\vec{g}_1(t), \vec{g}_2\,'(t))$.

③ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \vec{g}_1(t) \cdot \vec{g}_2(t)$ et $\forall t \in I,\ (\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2)'(t) = \vec{g}_1\,'(t) \cdot \vec{g}_2(t) + \vec{g}_1(t) \cdot \vec{g}_2\,'(t)$.

④ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|\vec{g}_1(t)\|$ et, si $\vec{g}_1(t) \neq 0$ sur I, $\forall t \in I,\ (\|\vec{g}_1\|)'(t) = \dfrac{\vec{g}_1\,'(t) \cdot \vec{g}_1(t)}{\|\vec{g}_1(t)\|}$.

Démonstration. Revenir aux définitions et propriétés des dérivées de fonctions réelles. □

2. Courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes

2.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrée cartésienne

Méthode 1. Étude d'une courbe paramétrée cartésienne

① on étudie le domaine de définition des fonctions coordonnées x et y.

② on recherche les symétries (section 2.2) et on restreint le domaine d'étude.

③ on étudie les variations simultanées de x et y (section 2.3).

④ on étudie les branches infinies (section 2.4).

⑤ on étudie (si demandé) les points multiples (section 2.5).

⑥ on trace les tangentes, asymptotes puis le support sur le domaine d'étude, on complète par symétrie.

2.2 Symétries

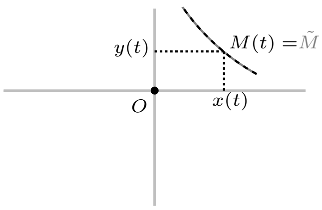
Soit $\vec{g}$ une courbe paramétrée définie sur $\mathcal{D}$ de fonctions coordonnées : x et y.

Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ une bijection et $\mathcal{D}_0 \subset D$ tels $\varphi(D_0) \cup \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. [(1)]
Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on note $\tilde{M}(t) = M(\varphi(t))$ le point de coordonnées $\tilde{x} = x\big(\varphi(t)\big)$ et $\tilde{y} = y\big(\varphi(t)\big)$.

Exemple 3. Pour une fonction $\vec{g}$ définie sur $\mathbb{R}$, l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto -t$ est bijective et $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}_+$ convient car $\mathcal{D}_0 \cup \varphi(\mathcal{D}_0) = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$. Le point $\tilde{M}(t)$ a pour coordonnées $\tilde{M}\big(x(-t)\,;y(-t)\big)$.

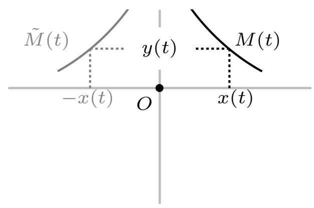
On peut restreindre l'étude de la courbe aux points de paramètres $t \in \mathcal{D}_0$ si $M(t)$ et $\tilde{M}(t)$ sont

confondus



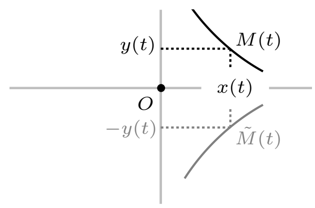
$x(\varphi(t)) = x(t)$ et $y(\varphi(t)) = y(t)$

symétriques par rapport à (Oy)



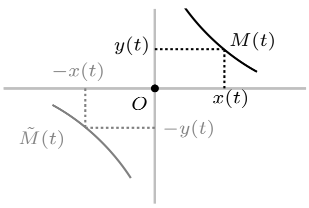
$x(\varphi(t)) = -x(t)$ et $y(\varphi(t)) = y(t)$

symétriques par rapport à (Ox)



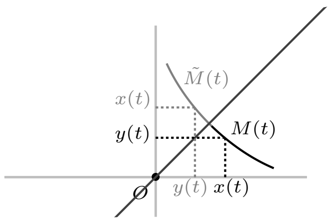
$x(\varphi(t)) = x(t)$ et $y(\varphi(t)) = -y(t)$

symétriques par rapport à O



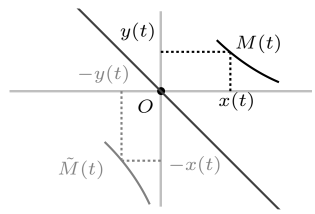
$x(\varphi(t)) = -x(t)$ et $y(\varphi(t)) = -y(t)$

symétriques par rapport à $y = x$



$x(\varphi(t)) = y(t)$ et $y(\varphi(t)) = x(t)$

symétriques par rapport à $y = -x$



$x(\varphi(t)) = -y(t)$ et $y(\varphi(t)) = -x(t)$

De même, $x(\varphi(t)) = -y(t)$ et $y(\varphi(t)) = x(t)$ signifient que $\tilde{M}$ est l'image de M par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O. Et $x(\varphi(t)) = y(t)$ et $y(\varphi(t)) = -x(t)$ signifient que $\tilde{M}$ est l'image de M par une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O.

Méthode 2. Liste (non exhaustive) de bijections à étudier

- ⋆ $\varphi : t \mapsto t + T$ lorsque x et y sont T périodiques (une période commune est un multiple commun des périodes de x et y, le plus petit possible ! Rappelons que $\cos(\omega t)$ a pour période $T = 2\pi/\omega$). Cela permet de restreindre l'étude à $[-T/2\,;T/2]$ ou tout autre intervalle de longueur π).
- ⋆ $\varphi : t \mapsto -t$: lorsque x et y sont paires ou impaires. Permet de restreindre l'étude aux t positifs.
- ⋆ $t \mapsto a + b - t$ (si on effectue l'étude sur $[a\,;b]$, permet de restreindre à $[a\,;(a+b)/2]$.)
- ⋆ $t \mapsto 1/t$ si $\mathcal{D}$ ne contient pas 0, pour des fonctions avec fractions rationnelles, logarithmes...

Exemple 4 (Astroïde). L'astroïde est la courbe paramétrée par $\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left|\begin{array}{l} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{array}\right.$

⋆ $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ par périodicité de sin et cos. On limite donc l'étude à $[-\pi\,;\pi]$.

⋆ $\forall t \in [-\pi\,;\pi],\ x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ car cosinus est paire et sinus impaire. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\pi]$.

⋆ $\forall t \in [0\,;\pi],\ x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ car $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

⋆ $\forall t \in [0\,;\frac{\pi}{2}],\ x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, on étudie $\vec{g}$ sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$.

Le fait d'oublier une symétrie n'empêche pas de réaliser l'étude, mais peut la compliquer et mener à des incohérences sur la courbe finale.

(1). ou plus généralement tels que tout réel $t \in \mathcal{D}$ soit l'image d'un $t_0 \in \mathcal{D}_0$ par une composée successive de φ ou sa réciproque.

2.3 Variations simultanées

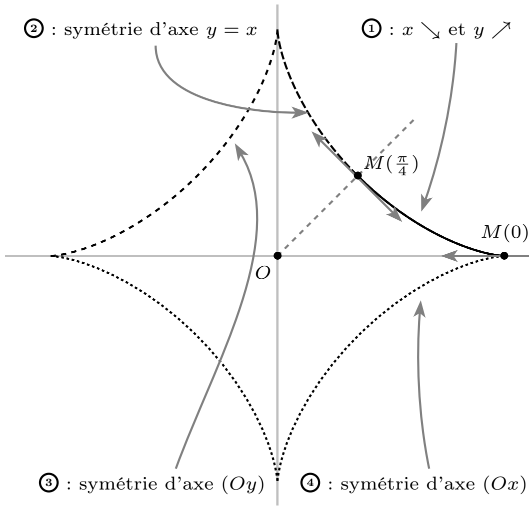
Méthode 3. Présentation du tableau de variations de x et y

On étudie les variations des fonctions coordonnées x et y comme celles de n'importe quelle fonction, via leurs dérivées. On présentera les variations sous forme d'un seul tableau de 6 lignes : dans l'ordre, la ligne de t, celle de x', celle de x, celle de y, celle de y' et enfin une ligne précisant le coefficient directeur des tangentes ou l'existence de branche infinie.
On calculera les coordonnées des points significatifs et un vecteur directeur des tangentes significative (pour t aux bord du tableau, ou lorsque $x'(t)$ ou $y'(t) = 0$.

Exemple 5. On reprend l'étude de l'astroïde définie dans l'exemple 4.

Les fonctions x et y sont dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t)$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
Rq	T.H.		-1



La tangente au point de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$ a un coefficient directeur de $\dfrac{y'(\frac{\pi}{4})}{x'(\frac{\pi}{4})} = -1$.

Le point de paramètre 0 est stationnaire. Le coefficient directeur de la tangente en $M(0)$ est la limite de : $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos^3(t) - 1} = \dfrac{(2\tau)^3}{(1-\tau^2)^3 - (1+\tau^2)^3} = \dfrac{8\tau^3}{-2\tau^6 - 6\tau^2} = -\dfrac{4\tau}{\tau^4 + 3} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ avec $\tau = \tan\dfrac{t}{2}$.

On peut alors tracer la courbe que l'on complète par les symétries détectées dans l'exemple 4.

2.4 Branches infinies

Définition 7. Soit I un intervalle et $\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(x(t)\,;y(t)\big)$.

Soit t_0 une extrémité de I (éventuellement infinie).

- ⋆ la courbe paramétrée par $\vec{g}$ admet une *branche infinie* en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{g}(t)\| = +\infty$.
- ⋆ la droite $\mathcal{D}$ est *asymptote* à la courbe de $\vec{g}$ en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} d(\mathcal{D}, M(t)) = 0$.

Remarque 6. Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$, le critère précédent équivaut à $\lim\limits_{t \to t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$ en vertu de la formule de distance point-droite.

Méthode 4 (Détermination de branches infinies). La courbe paramétrée par $\vec{g}$ admet lorsque t tend vers t_0,

① une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$ si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$.

② une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$.

③ et $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$,

(a) une branche parabolique de direction (Ox) si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$.

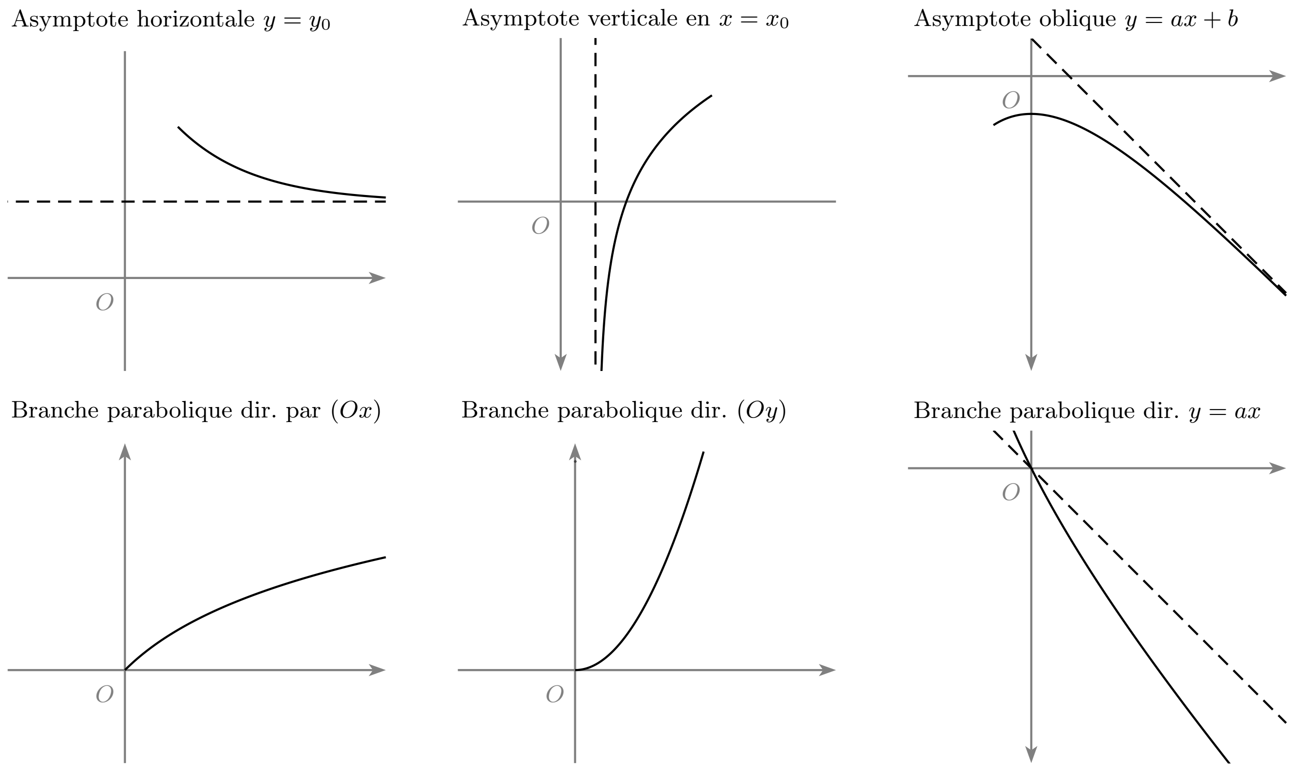
(b) une branche parabolique de direction (Oy) si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| = +\infty$.

(c) et $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$,

i. une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$

ii. une branche parabolique de direction $y = ax$ si $\lim\limits_{t\to t_0} |y(t) - ax(t)| = +\infty$

④ ni asymptote, ni branche parabolique dans tous les autres cas.



Exemple 6. ✎ Étudier $\vec{g} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{e^t}{t-1} \\ y(t) = t^2 - 2t \end{array} \right.$

2.5 Points multiples

Méthode 5. Recherche de points multiples

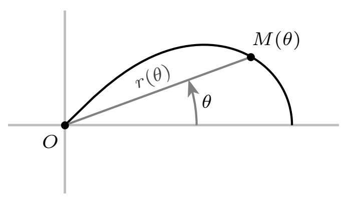
On recherche les points du support obtenus par des valeurs distinctes du paramètre t : on résout $\vec{g}(t) = \vec{g}(s)$ avec $t \neq s$. On cherchera aussi les tangentes en ces points.

Exemple 7. ✎ Étudier $\vec{g} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left| \begin{array}{l} x(t) = t + \dfrac{1}{2-t} \\ y(t) = t^2 \end{array} \right.$

3. Courbes paramétrées polaires

3.1 Courbe donnée par une équation polaire

Définition 8. Soit une fonction $r : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ est la courbe paramétrée $\vec{g} : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto r(\theta)\vec{u}(\theta)$ où $(O\,; \vec{u}(\theta)\,; \vec{v}(\theta))$ est le repère polaire.

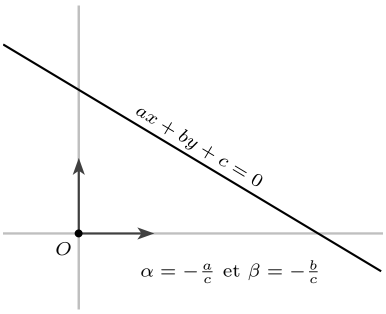


Remarque 7. Une courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ correspond donc à la courbe paramétrée $t \mapsto \vec{g}(r(t)\cos(t)\,; r(t)\sin(t))$, mais elle est souvent plus simple à étudier directement.

Exemple 8. On a déjà rencontré les courbes polaires suivantes :

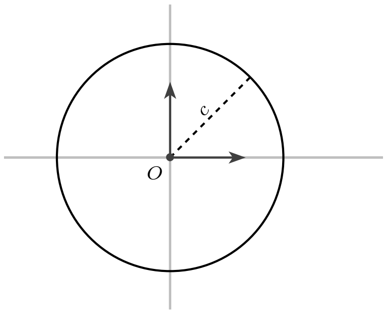
Droite ne passant pas par O

$$r = \frac{1}{\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta)}$$



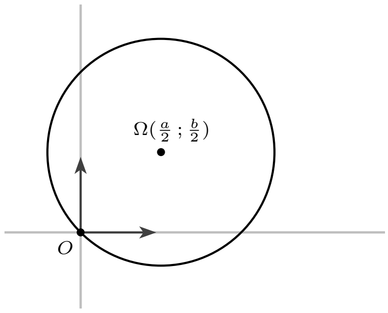
Cercle de centre O

$r = c$ où $c \in \mathbb{R}^*$ est fixé.



Cercle passant par O

$r = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$



3.2 Vecteurs vitesse et accélération

Proposition 2. Vecteurs dérivés

Soit r une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $(O ; \vec{u}(\theta) ; \vec{v}(\theta))$ est le repère polaire.
Le vecteur vitesse de paramètre $\theta \in I$ est $r'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + r(\theta)\,\vec{v}(\theta)$.
Si r est de classe $\mathcal{C}^2$, le vecteur accélération de paramètre $\theta \in I$ est $(r''(\theta) - r(\theta))\,\vec{u}(\theta) + 2r'(\theta)\,\vec{v}(\theta)$.

Démonstration. On utilise la formule ① de la proposition 1 □

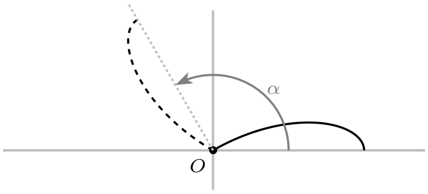
Remarque 8. Soit r une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soit $\theta \in I$ tel que $(r(\theta) ; r'(\theta)) \neq \vec{0}$ et $M(\theta)$ le point de la courbe de paramètre θ. Dans le repère polaire, la tangente à la courbe au point $M(\theta)$ est la droite passant par $M(\theta)$ dirigée par le vecteur $(r'(\theta) ; r(\theta))$

Remarque 9. Lorsque $(r'(\theta) ; r(\theta)) = (0 ; 0)$, la courbe admet un point stationnaire.
Il s'agit alors de l'origine O, et la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta)$.

3.3 Symétries et rotations

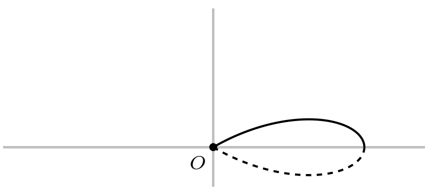
Soit r une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Les relations suivantes peuvent permettre de restreindre le domaine d'étude de la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$:

Rotation d'angle α



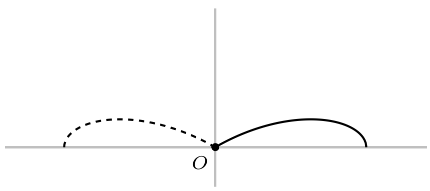
$r(\theta + \alpha) = r(\theta)$

Symétrie d'axe (Ox)



$r(-\theta) = r(\theta)$

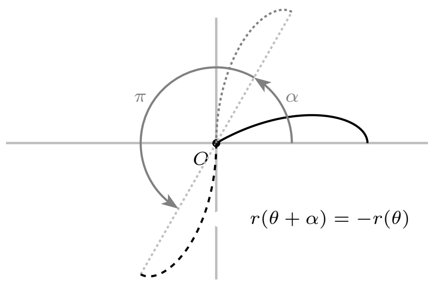
Symétrie d'axe (Oy)



$r(-\theta) = -r(\theta)$

Remarque 10. En particulier, si $\alpha = \pi$ on a une invariance par symétrie centrale.
On pourra considérer d'autres bijections du domaine pour tirer les mêmes conclusions.
On interprétera aussi $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = r(\theta)$ comme une invariance par symétrie d'axe $y = x$...

Rotation d'angle $\alpha + \pi$



$r(\theta + \alpha) = -r(\theta)$

3.4 Variations du rayon

MÉTHODE 6. Variations du rayon

Le tableau de variations du rayon s'obtient comme d'habitude. Pour la représentation, on fera figurer les tangentes et éléments remarquables.
⚠ si $r < 0$ on se souviendra de $[r\,;\theta] = [-r\,;\theta + \pi]$.

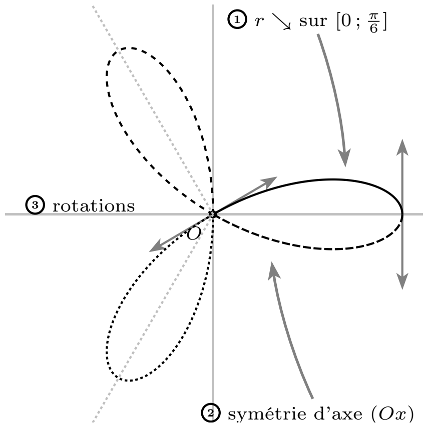
EXEMPLE 9 (Trifolium régulier). Soit la courbe (T) d'équation polaire : $r = \cos(3\theta)$. On remarque :

⋆ $\forall \theta \in \mathbb{R},\ r(\theta + \frac{\pi}{3}) = \cos(3\theta + \pi) = -\cos(3\theta) = -r(\theta)$: donc (T) est stable par rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et de centre O : on l'étudie sur $[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}]$.

⋆ $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}],\ r(-\theta) = r(\theta)$: (T) est stable par symétrie d'axe (Ox) : on restreint l'intervalle d'étude à $[0\,;\frac{\pi}{6}]$.

La fonction $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto \cos(3\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $\theta \in [0\,;\frac{\pi}{6}],\ r'(\theta) = -3\sin(3\theta) < 0$ si $\theta \neq 0$. Ainsi :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
$r'(\theta)$	0	$-$	-3
r	1	$\searrow$	0



La tangente en $M(0)$ est dirigée par $r'(0)\vec{u}(0) + r(0)\vec{v}(0) = \vec{v}(0)$.
La tangente en $M(\frac{\pi}{6})$ est dirigée par $r'(\frac{\pi}{6})\vec{u}(\frac{\pi}{6}) + r(\frac{\pi}{6})\vec{v}(\frac{\pi}{6}) = -3\vec{u}(\frac{\pi}{6})$.

3.5 Comportement asymptotique

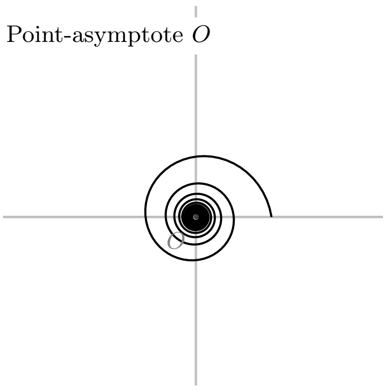
MÉTHODE 7. Étude en l'infini

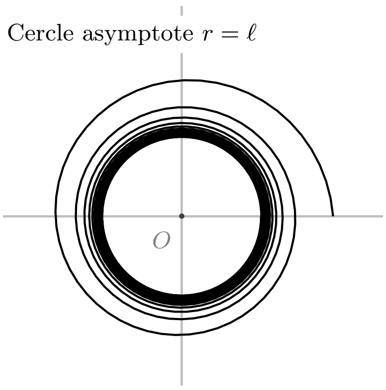
Si $+\infty$ est une extrémité du domaine de définition d'une courbe polaire, on a :

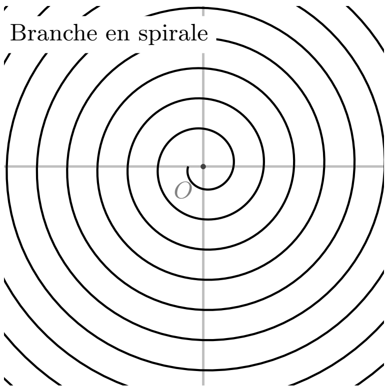
① un point-asymptote l'origine si $\lim\limits_{\theta\to\infty} r(\theta) = 0$.

② un cercle-asymptote de centre O et rayon $|\ell|$ si $\lim\limits_{\theta\to\infty} r(\theta) = \ell \in \mathbb{R}^*$.

③ une branche en spirale si $\lim\limits_{\theta\to\infty} r(\theta) = \pm\infty$.







MÉTHODE 8. Étude en θ_0

Si $\theta_0 \in \mathbb{R}$ est une extrémité du domaine de définition d'une courbe polaire, et $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta) = \pm\infty$, on a :

① une asymptote d'équation $Y = \ell$ dans le repère polaire en θ_0 si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = \ell$.

② une branche parabolique dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$ si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty$.

Les mêmes interprétations sont valables en $-\infty$.

EXEMPLE 10 (Strophoïde droite). ✎ Étudier la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{2}\dfrac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}$

4. Notions de géométrie différentielle

4.1 Longueur d'une courbe

Définition 9. Soient $a < b$ réels et $\vec{g} \in \mathcal{C}^1([a\,;b], \mathbb{R}^2)$.
La *longueur* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ est : $L(\vec{g}, a, b) = \displaystyle\int_a^b \|\vec{g}\,'(t)\| \,\mathrm{d}t$

Proposition 3 (Longueurs de courbes). La formule précédente donne en particulier :

- $\star$ $L(\vec{g}, a, b) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ où $\vec{g} = (x\,;y) \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R}^2)$
- $\star$ $L(\vec{g}, a, b) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ où $\vec{g} : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto (t\,;f(t))$ et $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$
- $\star$ $L(\vec{g}, a, b) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$ où $\vec{g} : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto (r(t)\cos(t)\,;r(t)\sin(t))$ et $r \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$

Exemple 11. ✎ Calculer la longueur (a) : d'un cercle de rayon 1 ; (b) : de l'astroïde de l'exemple 4.

4.2 Repère de Frenet

Définition 10. Une *abscisse curviligne* d'une courbe paramétrée par $\vec{g}$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $s : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $s'(t) = \|\vec{g}(t)\|$.

Remarque 11. Paramétrer une courbe à l'aide de l'abscisse curviligne en posant $\vec{f} = \vec{g} \circ s^{\langle -1 \rangle}$ permet d'obtenir un paramétrage indépendant du paramétrage de départ, dont l'interprétation cinétique est le parcourt de la trajectoire à vitesse 1.

Définition 11. Le repère de Frenet au point régulier $M(t)$ de paramètre t est le triplet $\Big(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t)\Big)$ où $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\|\vec{g}\,'(t)\|}\vec{g}\,'(t)$ et $\vec{N}$ est construit de sorte que le repère soit orthonormé direct.

Exemple 12. ✎ Déterminer le repère de Frenet de l'astroïde en $t \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4.3 Courbure

Définition 12. On appelle *détermination angulaire* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ sur l'intervalle I la fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

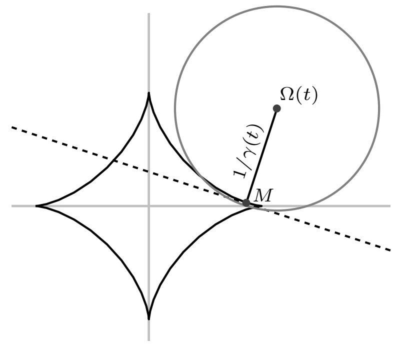
$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

La *courbure* de la courbe paramétrée par $\vec{g}$ au point de paramètre t est $\gamma(t) = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \dfrac{\det(\vec{g}\,', \vec{g}\,'')}{\|\vec{g}\,'\|^3}$.

Le *rayon de courbure* au point de paramètre t est $r(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)}$ et le *cercle osculateur* à la courbe en ce point, est le cercle de centre

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$$

et de rayon $R(t)$.
Ce cercle épouse la forme de la courbe au voisinage de $M(t)$.



Exemple 13. Déterminer le rayon de courbure et le centre de courbure de l'astroïde en son point de paramètre t.

TD du § 5

Exercice 1. Astroïde
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère l'astroïde $\mathcal{A}$, courbe paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t)=a\cos^3(t) \\ y(t)=a\sin^3(t) \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

On note M_t le point de $\mathcal{A}$ de paramètre $t\in\mathbb{R}$.

① Étudier et représenter l'astroïde $\mathcal{A}$.

② Soit $t\in]0\,;\frac{\pi}{2}[$. Donner les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}_t$, normal à l'astroïde au point M_t.
En déduire que la tangente $\mathcal{T}$ à l'astroïde au point M_t a pour équation $\sin(t)x+\cos(t)y=\cos(t)\sin(t)$.

③ La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe au point de paramètre t coupe l'axe des abscisses en A_t et l'axe des ordonnées en B_t. Calculer les coordonnées de ces deux points et la longueur du segment $[A_tB_t]$.
En déduire un procédé pour construire une astroïde avec une règle de longueur a.

④ Montrer que deux tangentes à l'astroïde sont perpendiculaires si et seulement si elles sont tangentes en M_t et $M_{t-\frac{\pi}{2}}$, où t est un réel.
Déterminer, en fonction de t, les coordonnées du point d'intersection N_t de ces deux tangentes.
Étudier et représenter la courbe orthoptique de l'astroïde. (courbe parcourue par N_t)

Exercice 2. Bicorne
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère la bicorne, paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t)=a\cos(t) \\ y(t)=a\dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

① Étudier et représenter la bicorne.

② Montrer que le lieu des orthocentres du triangle ABM, où $A(-a\,;0)$, $B(a\,;0)$ et M est un point mobile du cercle de centre $C(0\,;2a)$ et de rayon a, est une bicorne.

Exercice 3. Cycloïde
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif fixé.

On considère la cycloïde $\mathcal{C}$, courbe paramétrée par $\left|\begin{array}{l} x(t)=a(t-\sin t) \\ y(t)=a(1-\cos t) \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

On note M_t le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t\in\mathbb{R}$.

① Pour tous réels t, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$.
En déduire que $\mathcal{C}$ est invariante par une transformation que l'on précisera.

② Étudier et représenter la cycloïde $\mathcal{C}$.

③ Vérifier que la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite est une cycloïde.

Exercice 4. Étude de courbes paramétrées
Étudier

① la tractrice : $t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=t-\operatorname{th}(t) \\ y(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{array}\right.$ ② $t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=\cos^2(t)+\ln|\sin(t)| \\ y(t)=\sin(t) \end{array}\right.$ ③ $t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=\ln|1-t| \\ y(t)=\ln|1+t| \end{array}\right.$

④ la deltoïde : $t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=2\cos(t)+\cos(2t) \\ y(t)=2\sin(t)-\sin(2t) \end{array}\right.$ ⑤ la courbe de Lissajous : $t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=\sin(2t) \\ y(t)=\sin(3t) \end{array}\right.$

Exercice 5. Axe de symétrie

Soit la fonction définie par $\vec{g}:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ t\mapsto\left|\begin{array}{l} x(t)=t+\dfrac{1}{2t^2} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t} \end{array}\right.$.

① Étudier $\vec{g}$ et construire sa courbe. On vérifiera qu'elle admet un axe de symétrie.

② Montrer que l'ensemble des points, par lesquels passent deux tangentes à la courbe orthogonales entre elles, est une droite dont on donnera une équation.

Exercice 6. Triangle

Tracer la courbe (C) d'équation polaire $r = \dfrac{1}{\cos^3(\frac{\theta}{3})}$.

Une droite $\mathcal{D}_0$ passant par l'origine d'équation $\theta = \theta_0$ coupe la courbe (C) en trois points.

Montrer que les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Exercice 7. Étude de courbes polaires

Étudier ① $r = \tan(\theta)$ ② le quadrifolium : $r = \cos(2\theta)$ ③ $r = ae^{\lambda\theta}$ où $(a\,;\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 8. Strophoïde droite `Écrit ATS 2011`

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$, de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées $(1\,;0)$. Soit M un point du cercle tel que $\theta = (\vec{\imath};\overrightarrow{OM})$ avec $0 \leqslant \theta < \pi$, O' la projection orthogonale de O sur (AM) (c'est aussi le milieu de $[AM]$), A' la projection orthogonale de A sur (OM), M' la projection orthogonale de M sur (OA). L'intersection des trois hauteurs (OO'), (AA') et (MM') est l'orthocentre H du triangle (OAM).

① Donner les coordonnées des points M, M', O' en fonction de θ.

② Montrer que les coordonnées $(x(\theta)\,;y(\theta))$ du point H sont $(\cos(\theta)\,;\cos(\theta)\tan(\frac{\theta}{2}))$. (on conviendra que pour $\theta = 0$, $H = A$).

③ Calculer $(x'(\theta)\,;y'(\theta))$

④ On rappelle que si on pose $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, on a : $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Montrer, en exprimant tout à l'aide de t, que $y'(\theta) = \cos(\theta) - \dfrac{1}{1+\cos(\theta)}$.

En déduire le signe de $y'(\theta)$ pour $0 \leqslant \theta < \pi$. On notera θ_0 le réel de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

⑤ Faire le tableau de variation conjoint de $(x(\theta)\,;y(\theta))$ pour $0 \leqslant \theta < \pi$. On précisera les valeurs ou les limites de $x(\theta)$, $y(\theta)$ et de $x'(\theta)$, $y'(\theta)$ en 0 et π, ainsi qu'aux extrema éventuels de x et y.

⑥ On appelle Γ la courbe paramétrée décrite par $(x(\theta)\,;y(\theta))$. Montrer que Γ admet une asymptote verticale à préciser.

⑦ Donner une représentation graphique de Γ en plaçant l'asymptote, les points et les tangentes à ces points pour les valeurs 0, θ_0, $\frac{\pi}{2}$ de θ. (on prendra $\cos(\theta_0) \approx 0{,}62$ et $\cos(\theta_0)\tan(\frac{\theta_0}{2}) \approx 0{,}30$).

⑧ Montrer que les coordonnées $(x\,;y)$ des points de la courbe Γ vérifient $x(x^2+y^2) = x^2 - y^2$.

Exercice 9. Intersection des normales d'une famille de courbes

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe d'équation polaire $r = \lambda + \cos\theta$.

① Reconnaître la courbe $\mathcal{C}_0$.

② Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier les symétries de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$, dresser le tableau de variations du rayon sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Donner les valeurs du rayon polaire d'un vecteur directeur de la tangente pour les points d'angles polaires 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

③ Discuter du nombre de solutions de l'équation $r(\theta) = 0$ en fonction des valeurs de $\lambda > 0$. À quelle condition la courbe passe-t-elle par l'origine ? Donner un vecteur directeur de la tangente à l'origine pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 1$.

④ Représenter soigneusement, dans un même repère, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}_0$.

⑤ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Déterminer le lieu des intersections des normales à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_\lambda$ en deux points de même angle polaire (différent de $k\pi$, k entier relatif).

Exercice 10. Une propriété de la cochléoïde

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soit la cochléoïde Γ d'équation polaire $r = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

① Donner une équation de la normale au point de paramètre $\theta \in \mathbb{R}^*$, dans le repère polaire $(O\,;\vec{u}_\theta\,;\vec{v}_\theta)$.

② Montrer que le point de paramètre θ est le pied d'une normale issue de l'origine, si et seulement si $\theta = \tan(\theta)$.

③ En déduire que les pieds des normales issues de O de la cochléoïde sont situés sur la courbe d'équation $r = \cos\theta$. Reconnaître cette courbe.

Bilan du § 5

Prérequis

① §2 Complexes : section 7 : formules de trigonométrie (propositions 21, **22**, 23, 24 et parfois 27) ☐
② §3 Fonctions usuelles : en entier ! (mention spéciale pour les fonctions cosinus et sinus) ☐
③ §4 Géométrie plane ☐
  (a) équations de droites (section 1.5), produit scalaire (section 4) et déterminant (section 5) ☐
  (b) repères polaires (section 3.2) et coordonnées polaires (3.3) ☐

Objectifs prioritaires

① savoir étudier une courbe paramétrée (paragraphe 2) ☐
  (a) savoir trouver le vecteur tangent à une courbe en un point (paragraphe 1.3) ☐
  (b) savoir identifier les symétries d'une courbe (paragraphe 2.2) ☐
  (c) savoir dresser un tableau de variations simultanées (paragraphe 2.3) ☐
  (d) savoir reconnaître les branches infinies (paragraphe 2.4) ☐
  (e) savoir tracer la courbe à partir de tout ça ☐
② savoir étudier une courbe polaire (paragraphe 3) ☐
  (a) savoir trouver le vecteur tangent à une courbe polaire en un point (paragraphe 3.2) ☐
  (b) savoir identifier les symétries d'une courbe polaire (paragraphe 3.3) ☐
  (c) savoir trouver les variations du rayon et tracer la courbe (paragraphe 3.4) ☐

Objectifs secondaires

① savoir étudier les points stationnaires d'une courbe paramétrée (définition 6) ☐
② savoir trouver les points multiples d'une courbe paramétrée (paragraphe 2.5) ☐
③ Connaître les différentes formules de longueur de courbes (paragraphe 4.1) ☐
④ Savoir dériver un déterminant, un produit scalaire, une norme (paragraphe 1.4) ☐

Approfondissement

① savoir étudier les points stationnaires d'une courbe polaire (remarque 9) ☐
② reconnaître le comportement asymptotique d'une courbe polaire 3.5 ☐