§ 4 : Géométrie plane

1. Géométrie affine

1.1 Contexte

Définition 1. On appelle *espace vectoriel* réel un ensemble E, dont les éléments sont appelés *vecteurs*, et muni de deux opérations :

- ⋆ une addition commutative, associative, d'élément neutre $\vec{0}$ (le vecteur nul), et pour laquelle chaque vecteur $\vec{u}$ possède un opposé ($-\vec{u}$, le vecteur de sens contraire)
- ⋆ une multiplication scalaire telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$,
  (a) $(\lambda\mu)\,\vec{u} = \lambda\,(\mu\,\vec{u})$ (b) $(\lambda+\mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$ (c) $\lambda\,(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$ (d) $1\,\vec{u} = \vec{u}$

Définition 2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si l'un est multiple de l'autre ($\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$), ou, s'il existe une combinaison linéaire nulle $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} = \vec{0}$ avec α ou β non nul.

Définition 3. Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine, dont les éléments sont appelés des points, lorsqu'un espace vectoriel E agit sur $\mathcal{E}$ par translation :

- ⋆ étant donnés deux points A, B de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que B soit l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, ce que l'on note $B = A + \vec{u}$ ou encore $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On dit alors que la flèche droite allant de A vers B est *un représentant* du vecteur $\vec{u}$.
- ⋆ L'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient par deux translations, de vecteur $\vec{u}$ puis $\vec{v}$.
- ⋆ La translation de vecteur nul préserve chacun des points de l'espace.

Définition 4. La *droite* réelle $\mathcal{D}$ est un espace affine, dont l'espace vectoriel associé D est de dimension 1 :

① Il existe un vecteur $\vec{\imath}$ de D non nul. Un tel vecteur forme une *base* de D

② Tous les vecteurs de D sont colinéaires.

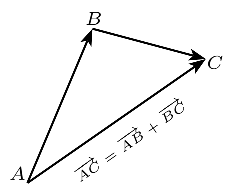
Définition 5. Le *plan* réel $\mathcal{P}$, dans lequel on a l'habitude de travailler, est un espace affine dont l'espace vectoriel associé P est de dimension 2, c'est-à-dire :

① Il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de P. Ces vecteurs forment une *base* de P.

② Trois vecteurs quelconques de P sont toujours coplanaires : étant donnés trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Proposition 1. Relation de Chasles

Soient trois points A, B et C d'un espace affine $\mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Démonstration. Par définition, C est à la fois l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et par celle de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Par unicité, on obtient le résultat.

1.2 Repérage dans le plan affine

Proposition 2.

Si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est une base de l'espace vectoriel P associé au plan affine, pour tout vecteur $\vec{v}$ de P, il existe x, y réels uniques tels que $\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.
Ces nombres sont les *coordonnées* de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, x est l'*abscisse* et y l'*ordonnée*.
On note $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou $\vec{v}(x\,;y)$, ou encore $\vec{v}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$.

Démonstration. Existence. Dans l'espace vectoriel P associé au plan affine, pour tout vecteur $\vec{v}$ de P, il existe α, β, γ non tous nuls tel que $\alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{\imath} + \gamma\,\vec{\jmath} = \vec{0}$. Si $\alpha = 0$, $\vec{0} = \beta\,\vec{\imath} + \gamma\,\vec{\jmath}$ avec β ou $\gamma \neq 0$, ce qui implique, de manière contradictoire, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ colinéaires.

Donc $\alpha \neq 0$ et $\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ avec $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $y = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

Unicité. Si $\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$, alors $\vec{0} = (x - x')\,\vec{\imath} + (y - y')\,\vec{\jmath}$, donc, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant non colinéaires : $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$ d'où finalement $x = x'$ et $y = y'$. □

Définition 6. Un *repère* du plan affine $\mathcal{P}$ est un triplet $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ où O est un point de $\mathcal{P}$ et $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ forment une base de l'espace vectoriel P associé.

L'unique couple $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ est formé des *coordonnées* du point M, dont l'*abscisse* est x, et l'*ordonnée*, y.

On note $M(x\,;y)$ ou $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$.

Proposition 3.

Soient les points $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$, les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$, et $\vec{v}\left|\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right.$, le réel λ. On a :

① $\vec{u} + \vec{v}\left|\begin{matrix} x + x' \\ y + y' \end{matrix}\right.$ ② $\lambda\vec{u}\left|\begin{matrix} \lambda x \\ \lambda y \end{matrix}\right.$ ③ $B = A + \vec{u}\left|\begin{matrix} x_A + x \\ y_A + y \end{matrix}\right.$ ④ $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right.$

Démonstration. ✎ Repose sur la proposition 2. □

1.3 Notion de déterminant

Définition 7. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel P. Le *déterminant* de deux vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right.$ de P est le nombre : $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Remarque 1. Il s'agit d'un « produit en croix » qui permet de tester la proportionnalité de quatre nombre, en particulier des coordonnées de deux vecteurs :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On verra dans la proposition 18 que la valeur du déterminant est la même dans toutes les bases orthonormales directes. Dans ce cadre, on notera simplement $\det = \det_{\mathcal{B}}$.

Proposition 4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

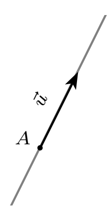
Démonstration. ✎ Utiliser la définition 2 de la colinéarité et le point ② de la proposition 3. □

1.4 Droites affines

Définition 8. Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble

$$\mathcal{D} = (A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}\} = \{A + t\,\vec{u} : t \in \mathbb{R}\}$$

est la *droite* passant par A de *vecteur directeur* $\vec{u}$.
Si A et B sont deux points distincts du plan, la *droite* (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.



Remarque 2. On vérifie que les droites $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ sont identiques si et seulement si le point B appartient à la droite $(A, \vec{u})$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

En particulier, une droite admet une infinité de vecteurs directeurs : il s'agit de l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur directeur donné.

REMARQUE 3. Si $M \in (A, \vec{u})$, on note $\overline{AM}$ l'unique réel tel que $\overline{AM}\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. C'est la *mesure algébrique* du segment $[AM]$, elle dépend de $\vec{u}$. En revanche, si $B, C, D \in (A, \vec{u})$ avec $B \neq A$, le quotient $\overline{CD}/\overline{AB}$ ne dépend pas du vecteur $\vec{u}$.

DÉFINITION 9. Deux droites sont dites *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

1.5 Différentes descriptions d'une droite

PROPOSITION 5.

Soient a, b, c réels avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tel que $ax + by + c = 0$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.
On dit que $ax + by + c = 0$ est une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$.
Réciproquement, on obtient une équation cartésienne de cette forme de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ en écrivant $M(x\,;y) \in \mathcal{D} \iff \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right) = 0$.

Démonstration. $ax + by + c = 0 \iff a\left(x + \frac{ca}{a^2+b^2}\right) + b\left(y + \frac{cb}{a^2+b^2}\right) = 0 \iff \det\left(\vec{n}; \overrightarrow{AM}\right) = 0 \iff M$ appartient à la droite passant par $A(-\frac{ca}{a^2+b^2}\,; -\frac{cb}{a^2+b^2})$ et dirigée par $\vec{u}(-b\,;a)$. □

DÉFINITION 10. En coordonnées, la définition 8 se traduit par : la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;y_{\vec{u}})$ est l'ensemble des $M(x\,;y)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\,x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\,y_{\vec{u}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Un tel système est appelé *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$.

MÉTHODE 1. obtenir un système d'équations paramétriques

Pour obtenir un système d'équations paramétriques d'une droite $\mathcal{D}$ ...

① d'équation $ax + by + c = 0$. On obtient un vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$ et un point A en choisissant une valeur de x_A ou y_A et en calculant l'autre avec l'équation. On utilise ensuite la définition 10.

② d'équation $ax + by + c = 0$. On trouve deux points A et B avec la méthode précédente et on forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et A, puis on utilise la définition 10.

③ parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par A. On utilise la définition 10 avec A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}'$.

EXEMPLE 1. ✎ Former un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne des droites :

① (AB) où $A(1\,;2)$ et $B(-1\,;3)$

② $(A\,;\vec{u})$ où $\vec{u}(-2\,;3)$

③ $\mathcal{D}$ // (AB) passant par $O(0\,;0)$.

④ d'équation $2x + y + 1 = 0$

⑤ paramétrée par $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t - 2 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

1.6 Intersection de deux droites

MÉTHODE 2. intersection de deux droites

Deux droites se coupent en un point unique si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires. Dans le cas contraire, elles sont soit strictement parallèles, soit confondues.
Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système :

- ⋆ de deux équations à deux inconnues x, y si l'on dispose des équations cartésiennes des droites
- ⋆ de trois équations à trois inconnues x, y, t si l'on a une équation cartésienne d'une droite et un système paramétrique de l'autre. (c'est le cas le plus simple).
- ⋆ de quatre équations à quatre inconnues x, y, t, t' si l'on a deux systèmes paramétriques (le plus compliqué : il faut alors impérativement choisir deux paramètres t et t' distincts. Dans ce cas, mieux vaut chercher une équation cartésienne de l'une des droites d'abord)

EXEMPLE 2. ✎ chercher l'intersection des droites de l'exemple 1 : ① et ④ d'une part, ⑤ et ④ d'autre part.

2. Barycentres

2.1 Réduction

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine (par exemple le plan affine).

> DÉFINITION 11. Un *système de points pondérés* est la donnée de n couples, chacun composé d'un point et d'un réel (appelé *masse* du point) : $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ où $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la somme des masses soit non nulle : $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$.

PROPOSITION 6 (Réduction). Soient un système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ et deux points M et G, on considère :

$$(\mathcal{R}) \; : \; \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

① Il existe un unique point G, le *barycentre* du système, tel que $(\mathcal{R})$ soit vraie pour tout point M.

② Si l'égalité $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour un point G et un point M, G est le barycentre du système.

③ G tel que $\overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\overrightarrow{A_1A_n} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\overrightarrow{A_1A_n}$ est un barycentre du système.

Démonstration. ① *unicité* : si G et H sont deux barycentres du système, alors
$\alpha_1 \overrightarrow{HA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{HA_n} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{HG} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{HH}$ donc $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$: $G + M$.

② : si $\alpha_1 \overrightarrow{NA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{NA_n} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{NG}$, alors pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \dots \alpha_n)\overrightarrow{MG} &= (\alpha_1 + \dots \alpha_n)\overrightarrow{MN} + (\alpha_1 + \dots \alpha_n)\overrightarrow{NG} = \alpha_1\overrightarrow{MN} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MN} + \alpha_1 \overrightarrow{NA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{NA_n} \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MA_1}) + \cdots + \alpha_n (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_n}) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}\end{aligned}$$

③ : l'égalité équivaut à $(\mathcal{R})$ pour $M = A_1$, donc, d'après ②, G est barycentre (on a ainsi l'existence du ①)

EXEMPLE 3. ✎ La notion de barycentre peut permettre de simplifier des égalités vectorielles. Soient A et B deux points du plans tels que $AB = 6$. Décrire l'ensemble des point M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12$.

REMARQUE 4. Lorsque tous les masses d'un systèmes sont égales, on parle de l'*isobarycentre* du système. Le milieu d'un segment est l'isobarycentre de ses deux extrémités, le centre de gravité d'un polygone, celui de ses sommets.

REMARQUE 5. Le barycentre G de deux points A, B est aligné avec ces deux points, d'après l'égalité de réduction $(\mathcal{R})$. La droite (AB) est l'ensemble de barycentres de A et B, le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids positifs.

PROPOSITION 7. COORDONNÉES

Dans $\mathcal{E}$ muni d'un repère, les coordonnées du barycentre G du système de points $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ sont les moyennes de celles des A_i, pondérées par les α_i :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \; y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \; \dots$$

Démonstration. Appliquer $(\mathcal{R})$ à $M = O$. □

2.2 Homogénéité et associativité

PROPOSITION 8 (Homogénéité). Soit $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés, et G le barycentre du système. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre du système $\{(A_1, t\alpha_1); \dots; (A_n, t\alpha_n)\}$

Démonstration. Il suffit de multiplier par $t \neq 0$ l'égalité $(\mathcal{R})$ de la proposition 6. □

PROPOSITION 9 (Associativité). Soient $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ et $\{(B_1, \beta_1); \dots; (B_n, \beta_n)\}$ deux systèmes de points pondérés de barycentres respectifs G et H. Si $\alpha + \beta \neq 0$, où $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\beta = \beta_1 + \beta_n$, alors le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n); (B_1, \beta_1); \dots; (B_n, \beta_n)\}$ est celui de $\{(G, \alpha); (H; \beta)\}$.

Démonstration. Ajouter les deux égalités $(\mathcal{R})$ correspondant à G et H.

Exemple 4. ✎ Démontrer que l'isobarycentre d'un triangle (appelé *centre de gravité*) appartient à chacune de ses médianes.

3. Géométrie euclidienne

3.1 Repères orthonormés

Remarque 6. La donnée d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ permet d'identifier le plan à l'ensemble des nombres complexes et de définir la norme d'un vecteur $\vec{w}(x\,;y)$ par $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la distance $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, et la mesure d'un angle orienté de deux vecteurs $(\widehat{\vec{w}\,;\vec{w}'})$ à un multiple entier de 2π près.

Définition 12. On dit d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ (ou une base $(\vec{u}\,;\vec{v})$) qu'il est

① *direct* si la mesure principale (entre $-\pi$ et π) de l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est strictement positive. (et *indirect* sinon)

② *orthogonal* si $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

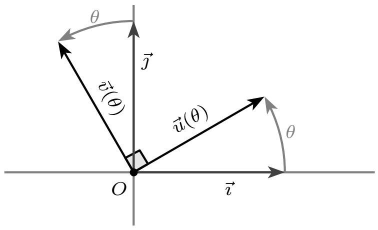
③ *orthonormé* ou *orthonormal* si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

④ *orthonormé direct* si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Définition 13. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rcrcl} \vec{u}(\theta) & = & \cos(\theta)\,\vec{\imath} & + & \sin(\theta)\,\vec{\jmath} \\ \vec{v}(\theta) & = & -\sin(\theta)\,\vec{\imath} & + & \cos(\theta)\,\vec{\jmath} \end{array}$$

Un *repère polaire* est un repère du type $(O\,;\vec{u}(\theta)\,;\vec{v}(\theta))$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$.



Remarque 7. La fonction $\vec{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto (\cos\theta\,;\sin\theta)$ est dérivable et $\vec{u}\,'(\theta) = \vec{v}(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
De même pour $\vec{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto (-\sin\theta\,;\cos\theta)$ avec $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \vec{v}\,'(\theta) = -\vec{u}(\theta)$.

Proposition 10. Repère polaire

① Un repère polaire est un repère orthonormé direct.

② Si $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est un repère orthonormé direct, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \vec{u}(\theta)$ et $\vec{v} = \vec{v}(\theta)$.

③ Soient $A(x_A;y_A)$ et $M(x;y)$ deux points. On note $(X;Y)$ les coordonnées de M dans $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcrcl} X & = & \cos(\theta)\cdot(x-x_A) & + & \sin(\theta)\cdot(y-y_A) \\ Y & = & -\sin(\theta)\cdot(x-x_A) & + & \cos(\theta)\cdot(y-y_A) \end{array}\right.}$$

④ Soient A et $M(x;y)$ deux points. On note $(X;Y)$ et $(X_O;Y_O)$ les coordonnées de M et O dans $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & \cos(-\theta)\cdot(X-X_O) & + & \sin(-\theta)\cdot(Y-Y_O) \\ y & = & -\sin(-\theta)\cdot(X-X_O) & + & \cos(-\theta)\cdot(Y-Y_O) \end{array}\right.$$

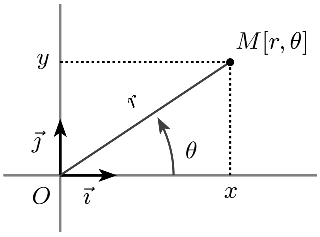
Démonstration. ① : on remarque que les affixes de $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a bien : $|z| = |z'| = 1$ et $\arg(z'/z) = \arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
② : notons z et z' les affixes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme $|z| = |z'| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Et $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \arg(z'/z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ implique $z' = \mathrm{i}z$: donc $\vec{u} = \vec{u}(\theta)$ et $\vec{v} = \vec{v}(\theta)$.
③ : En termes d'affixes, $\overrightarrow{AM} = X\,\vec{u}(\theta) + Y\,\vec{v}(\theta) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-x_A)\,\vec{\imath} + (y-y_A)\,\vec{\jmath}$ se traduit par :
$X\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Y = (x-x_A) + \mathrm{i}(y-y_A)$ soit $X + \mathrm{i}Y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(x-x_A) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(y-y_A)$.
On conclut en identifiant les parties réelles et imaginaires.

④ : c'est la formule précédente, pour un angle de $-\theta$ et une nouvelle origine O. □

Exemple 5. Soit $(\mathcal{H})$ la courbe d'équation $y^2 - x^2 = 2$.
Écrire l'équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O\,;\vec{u}(\frac{\pi}{4})\,;\vec{v}(\frac{\pi}{4}))$, et reconnaître cette courbe.

3.2 Coordonnées polaires

Définition 14. Un point M a pour *coordonnées polaires* les réels $[r\,;\theta]$, si et seulement si
$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{\imath} + r\sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$
Les nombre r est un *rayon polaire*, et le nombre θ, un *angle polaire* (associé au rayon r) du point M.
Le couple $[OM\,;(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}})]$ forme des coordonnées polaires du point M.



Remarque 8. À la différence des coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires ne sont pas uniques : $[r\,;\theta] = [r\,;\theta+2\pi] = [-r\,;\pi+\theta] = \dots$.
Tous les réels sont des angles polaires du point O : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $[0\,;\theta]$ est couple de coordonnées polaires de O.

Remarque 9. On définit aussi les coordonnées polaires d'un vecteur $\vec{u}$, comme celles du point $M = O + \vec{u}$.

Remarque 10. Soit M de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$, de rayon polaire r et d'angle polaire θ. Alors
$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \iff r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Exemple 6. ✎ Donner les coordonnées polaires de $M(-3\,;3)$ et les coordonnées cartésiennes de $N[2\,;\frac{5\pi}{6}]$.

Proposition 11 (Équation polaire d'une droite). Une *équation polaire* d'une droite passant par l'origine est de la forme $\theta = a$.
Une équation polaire d'une droite ne passant pas par O est $r = \dfrac{1}{\alpha\cos(\theta)+\beta\sin(\theta)}$.
Réciproquement, ces équations sont celles de droites (ne passant pas ou passant par l'origine).

Démonstration. Partir de l'équation cartésienne et passer en polaires. Faire le contraire pour la réciproque. □

Exemple 7. ✎ Reconnaître la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{\cos(\theta)+3\sin(\theta)}$.

4. Produit scalaire

4.1 Définition du produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$

Proposition 12. Formules du produit scalaire

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. On a les égalités suivantes, qui définissent le nombre réel appelé *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = xx'+yy' = \Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$$
La dernière égalité n'est valable que pour deux vecteurs non nuls. Le produit scalaire est parfois noté $\langle\vec{u}\,;\vec{v}\rangle$.

Démonstration. $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right) = xx'+yy'$
$\Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = \Re\mathrm{e}((x-\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y)) = \Re\mathrm{e}(xx'+yy'+\mathrm{i}(xy'-x'y)) = xx'+yy'$.
Si $\vec{u},\vec{v}\neq 0$, avec $\vec{u}[\rho\,;\theta]$ et $\vec{v}[\rho'\,;\theta']$, $\Re\mathrm{e}(\bar{z}z') = \Re\mathrm{e}(\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}) = \Re\mathrm{e}(\rho\rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta'-\theta)}) = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$. □

REMARQUE 11. ⚠ le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre, pas un vecteur !

La première égalité montre que la valeur du produit scalaire ne dépend pas du repère orthonormé dans lequel on travaille.

4.2 Propriétés du produit scalaire

PROPOSITION 13. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Soient $\vec{u};\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

① homogénéité : $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$.

② bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ et $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

③ symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

④ positivité : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$.

⑤ caractère défini : $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0$.

⑥ caractérisation de l'orthogonalité : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$

Démonstration. ✎ Passer par la caractérisation complexe ! □

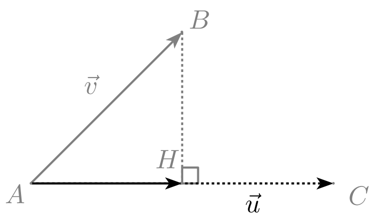
EXEMPLE 8. ✎ monter que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

4.3 Projection orthogonale

PROPOSITION 14. PROJETÉ ORTHOGONAL

Soient A, B et C trois points avec $A \neq B, C$. Le projeté orthogonal H de B sur (AC) vérifie :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$$

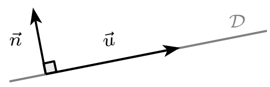


Démonstration. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$. □

EXEMPLE 9. ✎ Calculer les coordonnées projeté orthogonal H de $M(3;4)$ sur la droite d'équation $y - x = 0$.

4.4 Droites et vecteurs normaux

DÉFINITION 15. Un vecteur $\vec{n}$ est *normal* à une droite $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.



REMARQUE 12. Si $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ alors $\vec{n} = \vec{u}\begin{vmatrix}-y\\x\end{vmatrix}$ vérifie $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{n}}) = +\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

PROPOSITION 15. DÉTERMINER UN VECTEUR NORMAL

Soit $\mathcal{D}$ une droite ...

① d'équation $ax + by + c = 0$ où $(a;b) \neq (0;0)$. Alors $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

② de vecteur directeur $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$. Alors $\vec{n}\begin{vmatrix}-\beta\\\alpha\end{vmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

③ parallèle à une droite $\mathcal{D}'$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}'$. Alors $\vec{n}'$ est aussi un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

④ perpendiculaire à une droite $\mathcal{D}'$, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

Démonstration. ① si $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ vérifient $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c = 0$, la différence vérifie $a(x'-x) + b(y'-y) = 0$ soit $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MM'} = 0$ avec $\vec{n}(a;b)$. □

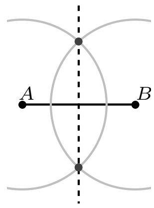
Méthode 3. Équation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Pour déterminer l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ passant par $A(x_A\,;y_A)$,

- ⋆ On écrit $M(x;y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_A) = 0$ et on développe.
- ⋆ ou alors, on part de $ax+by+c=0$ où $(a\,;b)$ sont les coordonnées de $\vec{n}$, et on substitue les coordonnées de A pour trouver c.

Cette méthode est utile pour trouver l'équation d'une perpendiculaire à une droite donnée, par exemple.

Exemple 10. ✎ On rappelle que la *médiatrice* d'un segment est la droite perpendiculaire au segment qui le coupe en son milieu.
On caractérise aussi la médiatrice d'un segment comme l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment : M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AM = BM$.
Trouver, de deux manières différentes, une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$, où $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;4)$.



4.5 Distance d'un point à une droite

Définition 16. La distance d'un point M_0 a une droite $\mathcal{D}$ est le nombre noté $d(\mathcal{D}, M_0)$ égal à la distance de M_0 au projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$. C'est la plus petite distance du point M_0 à un point de la droite.

Proposition 16. Distance d'un point à une droite

Soit $M_0(x_0;y_0)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$. On a : $\boxed{d(M_0,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

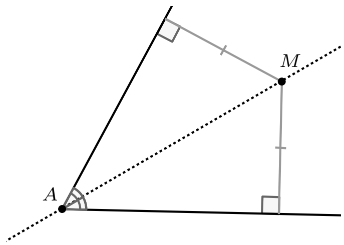
Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$. Le vecteur normal à $\mathcal{D}$ $\vec{n}(a;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{HM_0}$ étant colinéaires, $|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}| = HM_0\,\|\vec{n}\|$, donc

$$d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_0-x_H)+(by_0-y_H)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0-ax_H-by_H-c+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

car $H \in \mathcal{D} : ax_H+by_H+c = 0$. □

Exemple 11. ✎ Distance de $M(1;2)$ à $\mathcal{D}\ :\ y = x+2$?

Exemple 12. ✎ Les *bissectrices* de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les deux droites formées des points équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en A et dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, une bissectrice, dirigée par $\vec{w}$, des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passe par A et vérifie $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u}\,;\vec{w}})\ [2\pi]$.
Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices des droites d'équation $x+y=2$ et $x-y=4$.



4.6 Équation normale d'une droite

Définition 17. Une *équation normale* d'une droite $\mathcal{D}$ est de la forme $\cos(\theta)\,x + \sin(\theta)\,y = p$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^+$. Un vecteur normal unitaire est $\vec{u}(\cos\theta\,;\sin\theta)$, et $d(O,\mathcal{D}) = p$.

À partir d'une équation $ax+by+c=0$, on obtient l'équation normale d'une droite en écrivant $ax+by=-c$ ou $-ax-by=c$ selon le signe de c et en divisant par $\sqrt{a^2+b^2}$ (non nul car $(a\,;b) \neq (0\,;0)$).

Exemple 13. ✎ Donner l'équation normale de $x-y+2=0$.

4.7 Équations de cercles

On obtient souvent une équation cartésienne d'un cercle par l'un des deux points de vue :

Remarque 13 (Cercle défini par son centre et son rayon). Le point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega)$ et de rayon r si et seulement si $\Omega M = r$ ce qui équivaut à : $\Omega M^2 = r^2 \iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = r^2$.
Par exemple, $x^2+(y+1)^2 = 16$ est une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(0\,;-1)$ et de rayon 4.

Remarque 14 (Cercle défini par un diamètre). Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $A = M$ ou $B = M$ ou $(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui équivaut à : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Méthode 4. Reconnaître l'équation d'un cercle

Les cercles ont une équation cartésienne de la forme $x^2+ax+y^2+bx+c = 0$. Pour reconnaître s'il s'agit d'un cercle et trouver alors son centre et son rayon, on met x^2+ax et y^2+by sous forme canonique :

- ⋆ on écrit $x^2+ax = x^2+2(\frac{a}{2})x$ et on reconnaît le début d'une identité remarquable.
- ⋆ on complète l'identité : $x^2+2(\frac{a}{2})x+(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a}{2}$.

On isole les termes constants et on obtient une équation de la forme $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = m$.

- ⋆ si $m > 0$, on a l'équation d'un cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{m}$.
- ⋆ si $m = 0$, on a l'équation du point A.
- ⋆ si $m < 0$, on a l'équation de l'ensemble vide $\varnothing$.

Exemple 14. Reconnaître : ① $x^2+4x+y^2 = 0$ ② $x^2+y^2+y+3 = 0$ ③ $4y = 2x^2+2y^2$ ④ $x^2+y^2+6y+9 = 0$

Proposition 17 (Équation polaire de certains cercles). L'ensemble des $M[\rho\,;\theta]$ tels que $\rho = r > 0$ est le cercle de centre O et de rayon r.

L'ensemble des $M[\rho\,;\theta]$ tels que $\rho = a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est un cercle passant par l'origine. De tels cercles ont une équation de ce type.

Démonstration. Partir de l'équation cartésienne et effectuer un passer en polaires. □

Exemple 15. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $\mathcal{D}$ une droite. Démontrer que leur intersection compte 2, 1, ou 0 points selon que la distance de la droite au centre du cercle est strictement inférieure, égale, ou strictement supérieure au rayon.

On pourra travailler dans un repère orthonormé dont l'origine est le centre de $\mathcal{C}$, l'unité est le rayon de $\mathcal{C}$, et considérer une équation normale de $\mathcal{D}$: $\cos(\theta)x+\sin(\theta)y+c = 0$.

Remarque 15 (Intersection droite-cercle). Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et rayon R, $\mathcal{D}$ une droite. On a l'alternative (1) :

- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) > R$: l'intersection est vide.
- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) = R$: la droite est tangente au cercle, un point commun.
- ⋆ $d(O,\mathcal{D}) < R$: la droite coupe le cercle en deux points.

On recherche les points d'intersections en résolvant le système formé d'une équation cartésienne du cercle, et une équation cartésienne de la droite (ou un système paramétrique).

Remarque 16 (Intersection de deux cercles). Soient deux cercles distincts $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre et rayon respectifs (O,R) et (O',R'). On a l'alternative suivante :

- ⋆ $R+R' < OO'$: intersection vide, les cercles sont extérieurs.
- ⋆ $|R-R'| > OO'$: intersection vide, un cercle intérieur à l'autre.
- ⋆ $R+R' = OO'$: intersection réduite à un point : les cercles sont tangents extérieurement.
- ⋆ $|R-R'| = OO'$: intersection réduite à un point : les cercles sont tangents intérieurement ($R \neq R'$).
- ⋆ $|R-R'| < OO' < R+R'$: intersection réduite à deux points.

La recherche des points d'intersection de deux cercles passe par la résolution du système formé par leurs équations cartésiennes : la différence des équations permet d'isoler x et y, et une substitution de se ramener à une équation du second degré.

(1). se prouve dans un repère orthonormé centré en O, d'unité R, avec une forme normale de l'équation de $\mathcal{D}$

5. Déterminant dans une base orthonormée

5.1 Formule géométrique

Proposition 18. Formules du déterminant

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = \Im\mathrm{m}(\bar{z}z') = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$.
La dernière égalité n'est valable que pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Le nombre $\det(\vec{u};\vec{v})$ est parfois appelé *produit mixte* et noté $[\vec{u};\vec{v}]$.

Démonstration. Même principe que pour le produit scalaire. □

5.2 Propriétés du déterminant

Proposition 19. Propriétés du déterminant

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

① homogénéité : $\det(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{u},\lambda\vec{v})$.

② bilinéarité : $\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{w}) + \det(\vec{v},\vec{w})$ et $\det(\vec{w},\vec{u}+\vec{v}) = \det(\vec{w},\vec{u}) + \det(\vec{w},\vec{v})$

③ antisymétrie : $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$

④ caractérisation de la colinéarité : $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u},\vec{v}$ colinéaires

Démonstration. ✎ Passer par la caractérisation complexe ! □

5.3 Applications des déterminants

Méthode 5. colinéarité, parallélisme, alignement, équation de droite

L'application principale du déterminant est de détecter la colinéarité, le parallélisme ou l'alignement :

① deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

② deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

③ deux droites de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{n}\,;\vec{m}) = 0$.

④ deux droites, l'une de vecteur normal $\vec{n}$ et l'autre dirigée par $\vec{u}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\det(\vec{n}\,;\vec{u}) = 0$.

⑤ trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 0$.

⑥ équation cartésienne d'une droite passant par A, dirigée par $\vec{u}$: $M(x\,;y) \in \mathcal{D} \iff \det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0$.

Proposition 20 (Orientation). Un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ (ou une base $(\vec{u}\,;\vec{v})$) est direct si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) > 0$, indirect si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) < 0$.

Démonstration. Le déterminant est du signe du sinus, qui est celui de la valeur principale de l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$. □

Proposition 21 (Aires). Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire de $ABCD$ est $\mathcal{A}(ABCD) = \left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.
Soit ABC un triangle. L'aire de ABC est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.

Démonstration. On utilise la formule de l'aire du triangle ABC en exprimant sa hauteur en avec un sinus.

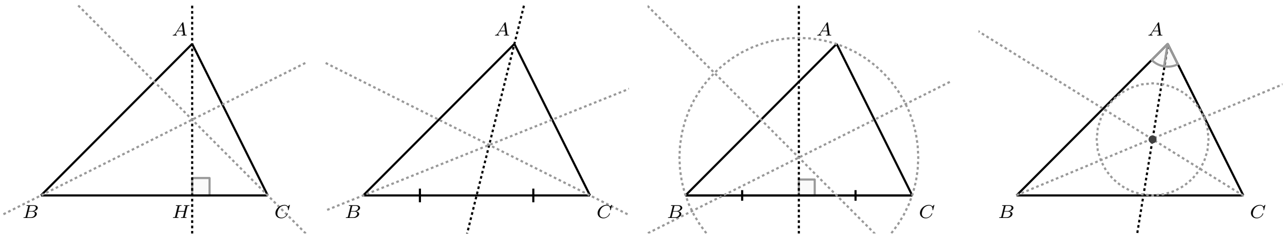
Exemple 16. ✎ Aire du triangle ABC, avec $A(-1\,;6)$, $B(4\,;5)$ et $C(-2\,;-2)$?

6. Rappels

6.1 Triangles

Définition 18. Un *triangle* est défini par trois points deux à deux distincts A, B, C. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Un triangle ABC est dit

- ⋆ *rectangle* en $A \iff (\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (le plus grand côté $[BC]$ est alors appelé *hypothénuse*)
- ⋆ *isocèle* en $A \iff AB = AC \iff \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *équilatéral* $\iff AB = AC = BC \iff \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *plat* $\iff$ A, B et C sont alignés.



Hauteurs — Médianes — Médiatrices — Bissectrices

Définition 19. La *hauteur* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC). Le *pied de la hauteur* issue de A est le point H d'intersection de la hauteur issue de A avec (BC). (⚠ une hauteur peu sembler « en dehors » du triangle).

Proposition 22. Les hauteurs d'un triangle sont *concourantes* (se coupent en un seul point). Leur point d'intersection est appelé l'*orthocentre* du triangle. Soit b la mesure d'un côté (base) et h est la distance du sommet opposé au pied de la hauteur issue de ce sommet (hauteur). L'aire du triangle est alors : $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$.

Définition 20. La *médiane* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et le milieu A' du côté opposé $[BC]$.

Proposition 23. Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection G est appelé *centre de gravité* du triangle ABC. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Proposition 24. Les médiatrices des côtés d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC. Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

Proposition 25. Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle inscrit* au triangle ABC (tangent aux côtés du triangle).

Proposition 26. La somme des angles d'un triangle est π (modulo 2π)

Proposition 27. Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si deux quelconques des quatre droites remarquables ci-dessus sont confondues.

Proposition 28. Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $[BC]$ est le diamètre de son cercle circonscrit.

Remarque 17. Dans un triangle rectangle en A :

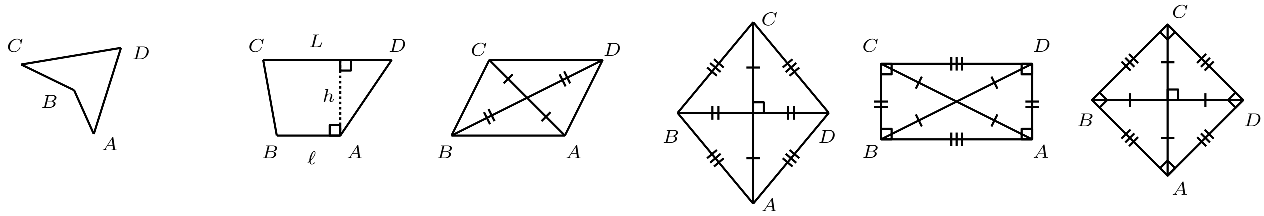
$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad \sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad \tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin(\hat{B})}{\cos(\hat{B})}$$

6.2 Quadrilatères

Définition 21. Un *quadrilatère* $ABCD$ est défini par les quatre points A, B, C, D dans cet ordre. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Les *diagonales* du quadrilatère $ABCD$ sont les segments $[AC]$ et $[BD]$.

Ses *côtés opposés* sont d'une part $[AB]$ et $[CD]$, et d'autre part $[CD]$ et $[DA]$.



Quadrilatère | Trapèze | Parallélogramme | Losange | Rectangle | Carré

Remarque 18 (*Trapèzes*). Un quadrilatère est un trapèze lorsqu'il a deux côtés opposés parallèles. Dans un trapèze on note L et ℓ les longueurs des côtés parallèles et h la distance entre ces deux côtés. L'aire du trapèze est alors : $\mathcal{A} = \frac{L+\ell}{2}$.

Remarque 19 (*Parallélogrammes*). Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ou encore si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux. Si ℓ est la longueur d'un côté du parallélogramme et h la distance de ce côté à son côté opposé, l'aire du parallélogramme est $\mathcal{A} = h \times \ell$.

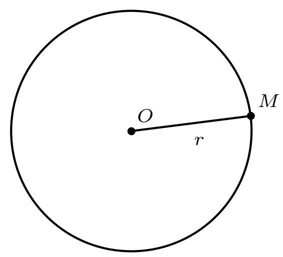
Remarque 20 (*Losanges*). Un quadrilatère est un losange si et seulement si tous ses côtés sont égaux, ou encore, si et seulement si c'est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de mêmes longueurs, ou enfin, si et seulement si ses diagonales se coupent perpendiculairement en leurs milieux.

Remarque 21 (*Rectangles*). Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si c'est un parallélogramme avec un angle droit, ou encore, si et seulement s'il a trois angles droits, ou enfin si et seulement si ses diagonales sont de mêmes longueurs et se coupent en leurs milieux.

Si ℓ est la largeur d'un rectangle et L sa longueur, l'aire du rectangle est $\mathcal{A}L \times \ell$.

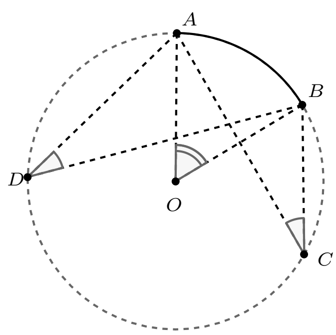
Un *carré* est un rectangle losange.

6.3 Cercles



Définition 22. Le *cercle* de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM = r$. Un *diamètre* du cercle est un segment dont les extrémités sont sur le cercle et dont le milieu est le centre du cercle.

Proposition 29. Le périmètre d'un cercle de rayon r est $p = 2\pi r$.
L'aire d'un *disque* (ensemble des M tel que $OM \leqslant r$) de rayon r est $\mathcal{A} = \pi r^2$.



Proposition 30 (Angle au centre). Soient A, B, C trois points distincts d'un cercle de centre O. Alors

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}})\ [2\pi]$$

Proposition 31 (Angle inscrit). . Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un cercle. Alors

$$(\widehat{\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}})\ [\pi]$$

Réciproquement, quatre points distincts vérifiant l'égalité précédente sont cocycliques (sur un même cercle) ou alignés.

TD du § 4

Exercice 1. Théorème de Ménélaus
Soient A, B et C trois points du plan non alignés.

Soient $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (CA) \setminus \{C, A\}$ et $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$.

Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

La mesure algébrique $\overline{AB}$ est l'abscisse de B sur une droite passant par A et B et munie d'un repère $(O\,;\vec{u})$.

Exercice 2. Culturel : géométrie du triangle
Soient A, B et C trois points.

On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, p le demi périmètre du triangle ABC et s sa surface.

① Montrer la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$. (utiliser le produit scalaire)

② Démontrer (qu'à des conditions que l'on précisera) $\sin^2(A) = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2c^2}$.

③ Montrer que $s = \dfrac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$. Énoncer des formules analogues.

④ Démontrer la formule des sinus (à des conditions que l'on précisera) : $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\hat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\hat{C})} = \dfrac{abc}{2s}$.

⑤ Démontrer la formule de Héron : $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 3. Droites, équations cartésiennes, système d'équations paramétriques
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite

① passant par $A(1\,;3)$ et dirigée par $\vec{u}(8\,;1)$.

② passant par les points $B(4\,;-1)$ et $C(0\,;-2)$.

③ passant par $D(-1\,;3)$ et orthogonale à $\vec{n}(1\,;1)$.

④ passant par $G(0\,;4)$ et parallèle à (EF) où $E(-1\,;3)$ et $F(2\,;-2)$.

⑤ passant par $G(0\,;4)$ et perpendiculaire à (EF) où $E(-1\,;3)$ et $F(2\,;-2)$.

⑥ dont un système paramétrique d'équations est $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

⑦ bissectrice (il y en a deux) des droites $\mathcal{D} : y = 4$ et $\mathcal{D}' : -4x + 3y + 4 = 0$.

⑧ médiatrice de $[AB]$ avec $A(3\,;-2)$ et $B(5\,;4)$.

Exercice 4. Équations de cercles
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Trouver une équation cartésienne et les éléments caractéristiques

① du cercle circonscrit au triangle ABC où $A(2\,;7)$, $B(6\,;-1)$ et $C(-3\,;2)$.

② du cercle de centre $\Omega(-1\,;2)$ et de rayon 4.

③ cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0\,;1)$ et $B(2\,;3)$.

Exercice 5. Cercle circonscrit à un triangle
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC, où $A(0\,;1)$, $B(2\,;3)$ et $C(-4\,;-12)$.

Exercice 6. Cercle inscrit d'un triangle
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les caractéristiques du cercle inscrit dans le triangle ABC, où $A(8\,;-7)$, $B(-4\,;2)$ et $C(-4\,;9)$.

Exercice 7. Construction d'une parabole
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;1)$.

On note $M(t\,;0)$ un point de l'axe des abscisses ($t \in \mathbb{R}$) et H l'orthocentre du triangle BAM.

Déterminer une équation du lieu $\mathcal{L}$ parcouru par H lorsque M décrit l'axe des abscisses. Reconnaître $\mathcal{L}$.

Exercice 8. Équation polaire

Reconnaître la courbe d'équation polaire : ① $r = \dfrac{1}{\cos(\theta) + 3\sin(\theta)}$ ② $r = 3\cos(\theta) - 4\sin(\theta)$

Exercice 9. Intersections de courbes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Reconnaître les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

① $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ et $\mathcal{D} : x + 3y - 2 = 0$.

② $\mathcal{D} : 5x - 2y = 7$ et $\mathcal{D}' : -7x + 3y - 1 = 0$

③ $\mathcal{D} : 9x - 6y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}' : -6x + 4y - 8 = 0$.

④ $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$

Exercice 10. Tangentes à un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les tangentes au cercle de centre $A(-2\,;1)$ et de rayon 5 qui passent par $B(5\,;2)$.

Exercice 11. Orthocentre et sommet d'un triangle défini par trois droites

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

La droite (AB) a pour équation $x - 2y + 3 = 0$, la droite $(AC) : 2x - y - 3 = 0$ et $(BC) : x + 2y + 1 = 0$.

Déterminer les coordonnées des sommets et de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 12. Autour d'un parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;0)$ et $C(3\,;3)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Calculer l'aire du parallélogramme et en déduire la distance de C à la droite (AB).

Exercice 13. Droites remarquables d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient $A(1\,;1)$, $B(3\,;7)$ et $C(-1\,;3)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que ces trois points sont alignés.

Exercice 14. Étude élémentaire de la droite de Simson

On rappelle le critère de cocyclicité (appartenance à un même cercle) suivant :

$(\star)$: quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})\ [\pi]$.

Soit ABC un triangle, et A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs d'un point M sur les droites (BC), (CA) et (AB). On souhaite démontrer le théorème :

(Simson) : les points A, B, C et M sont cocycliques si et seulement si les projetés A', B' et C' sont alignés.

① Faire deux figures : une dans le cas où le point M n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC, et une autre, dans le cas où M appartient à ce cercle.

② Avec $(\star)$, prouver $(\overrightarrow{C'A'}\,;\overrightarrow{C'M}) = (\overrightarrow{BA'}\,;\overrightarrow{BM})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{C'M}\,;\overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB'})\ [\pi]$.

③ Démontrer que $(\overrightarrow{C'A'}\,;\overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM})\ [\pi]$.

④ En utilisant $(\star)$ et la question précédente, conclure.

Bilan du § 4

Prérequis

- ⋆ §2 section 6 : applications des complexes à la géométrie ☐
- ⋆ §2 section 7 : les formules trigonométriques (surtout les propositions 21 à 24) ☐

Objectifs prioritaires

① Connaître la notion de produit scalaire (proposition 13) ☐
- (a) connaître l'application aux projections orthogonale (section 4.3) ☐
- (b) savoir refaire les exercices 5 et 6 ☐

② Connaître la notion de déterminant (proposition 18) ☐
- (a) connaître les applications à l'alignement (méthode 5) ☐
- (b) connaître les applications aux aires (proposition 21, exercice 12) ☐

③ Connaître la notion de droite : sections 1.5, 4.4, 4.6, 4.5 ☐
- (a) connaître les équations de droites cartésienne : proposition 5 ; ☐
- (b) connaître les systèmes paramétriques : définition 10 ; ☐
- (c) savoir refaire l'exercice 3 ☐
- (d) connaître la distance point–droite (proposition 16 ☐

④ Connaître les représentations d'un cercle : section 4.7 ☐
- (a) savoir refaire l'exercice 4 ☐

Objectifs secondaires

① savoir travailler en coordonnées polaires (section 3.2) ☐
- (a) connaître les équations polaires de droites : proposition 11 ☐

② Connaître les formules de changement de repère orthonormé direct (proposition 10) ☐

③ Connaître le calcul des coordonnées d'un barycentre : propriété 7 ☐

④ Traiter un problème affine (pas d'angle ni distance) dans un repère adapté : section 1 ☐
- (a) savoir refaire l'exercice 1 ☐

Approfondissement

① Connaître les propriétés des barycentres (6) réduction, (8) homogénéité, (9) associativité ☐

② Comprendre les définitions conceptuelles (espace vectoriel) du section 1 ☐